UNIVERSITÄT STUTTGART – II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. U. Seifert
Dr. E. Reister-Gottfried (Zimmer 3.150)

Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 4

Aufgabe 9: Zeitentwicklung eines allgemeinen Zweizustandssystems

Wir betrachten ein allgemeines Zweizustandssystem mit den beiden Zuständen $|+\rangle \mathrel{\widehat{=}} \binom{1}{0}$ und $|-\rangle \mathrel{\widehat{=}} \binom{0}{1}$. Der Hamiltonoperator kann nach geeigneter Wahl des Energienullpunktes in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ stets als

$$H = \hbar \left(A\,|+\rangle\langle+| - A\,|-\rangle\langle-| + B\,|+\rangle\langle-| + B\,|-\rangle\langle+| \right) \mathrel{\widehat{=}} \hbar \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Typische (teilweise effektive) Zweizustandssysteme sind Spin 1/2-Teilchen im Magnetfeld, Wasserstoffmolekülion, Polarisationszustand eines Photons (s. bspw. Feynman Lectures III).

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $E_\pm$ und die normierten Eigenzustände $|\chi_\pm\rangle$ des Hamiltonoperators H in den neuen Konstanten Ω und θ mit

$$A \equiv \Omega \cos 2\theta \quad \text{und} \quad B \equiv \Omega \sin 2\theta \qquad \text{mit} \quad \Omega \geq 0,\ \theta \in [0, \pi) \tag{2}$$

an. Wie groß ist die Differenz der Energieniveaus $E_\pm$? (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie ausgehend von der Schrödingergleichung die gekoppelten Bewegungsgleichungen der Komponenten $c_\pm(t)$ des Zustandsvektors

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \ . \tag{3}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $|\psi(t)\rangle$ mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenzustände [Hinweis: Diagonalisierung, Rücktransformation]. Zeigen Sie anschließend direkt anhand der Bewegungsgleichungen, dass $c_+(t)$ und $c_-(t)$ eine Differentialgleichung vom Typ eines harmonischen Oszillators erfüllen. Wie lautet die spezielle Lösung $|\psi(t)\rangle$ zur Anfangsbedingung

$$|\psi(0)\rangle = \lambda\,|+\rangle + \mu\,|-\rangle \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1 \ . \tag{4}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für den Fall, dass sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|-\rangle$ befindet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $p_+(t)$ bzw. $p_-(t)$, das System bei einer Messung zur Zeit t im Zustand $|+\rangle$ bzw. $|-\rangle$ zu finden? (1 Punkt)

Aufgabe 10: Zerfall eines instabilen Zustandes

Es sei $|\phi\rangle \equiv |\psi(0)\rangle$ ein instabiler quantenmechanischer Zustand zur Zeit $t = 0$, der beispielsweise ein angeregtes Atom oder ein instabiles Teilchen darstellen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand zur Zeit t noch nicht zerfallen ist, sei $p(t)$. Das betrachtete quantenmechanische System sei dabei von äußeren Einflüssen isoliert, so dass der Hamiltonoperator H, der den Zerfall beschreibt, zeitunabhängig ist. Der Zustand zur Zeit t ergibt sich mit dem Zeitentwicklungsoperator zu

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)|\phi\rangle \; . \tag{5}$$

Aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude $c(t) \equiv \langle\phi|\psi(t)\rangle$ folgt die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p(t) = |c(t)|^2 = |\langle\psi(t)|\phi\rangle|^2 = \langle\psi(t)|\,\mathcal{P}\,|\psi(t)\rangle = \langle\mathcal{P}\rangle \; , \tag{6}$$

den Zustand zur Zeit t im Anfangszustand $|\phi\rangle$ zu finden, wobei der Operator $\mathcal{P} \equiv |\phi\rangle\langle\phi|$ auf den Anfangszustand $|\phi\rangle$ projiziert. Alle Erwartungswerte werden im Zustand $|\psi(t)\rangle$ gebildet, d.h. $\langle A\rangle \equiv \langle A\rangle_{|\psi(t)\rangle} = \langle\psi(t)|\,A\,|\psi(t)\rangle$.

a) Zeigen Sie mit (5), dass die Erwartungswerte $\langle H\rangle$ und $\langle H^2\rangle$ zeitlich konstant sind und die Unschärfe ΔH eine Erhaltungsgröße darstellt. Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathcal{P}$ um einen Projektor handelt, d.h. $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. (1 Punkt)

b) Zunächst wird der Zerfall bei kleinen Zeiten betrachtet. Zeigen Sie, dass für endliches ΔH die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p(t) = 1 - \frac{(\Delta H)^2}{\hbar^2}t^2 + O(t^3) \tag{7}$$

lautet. Folgern Sie hieraus, dass der Zustand $|\phi\rangle$ nicht exponentiell zerfällt. (2 Punkte)

c) Für den Zerfall mit endlichem ΔH lässt sich ein allgemeineres Ergebnis herleiten. Zeigen Sie unter Verwendung des Ehrenfest-Theorems für $p(t) = \langle\mathcal{P}\rangle$ und der Heisenbergschen Unschärferelation die Ungleichung

$$\left|\frac{dp(t)}{dt}\right| \leq \frac{2\Delta H}{\hbar}\sqrt{p(1-p)} \; . \tag{8}$$

Betrachten Sie nun zunächst die Differentialgleichung, die entsteht, wenn Sie in (8) ein Gleichzeichen setzen. Bestimmen Sie die Lösung $p_0(t)$ dieser Differentialgleichung für den Fall $dp_0(t)/dt \leq 0$ und mit der Anfangsbedingung $p_0(0) = 1$. Folgern Sie anschließend die Gültigkeit der Ungleichung

$$p(t) \geq p_0(t) = \cos^2\left(\frac{t\Delta H}{\hbar}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi\hbar}{2\Delta H} \tag{9}$$

für die Wahrscheinlichkeit $p(t)$, die der Ungleichung (8) genügt. (3 Punkte)

d) Es sei $|n\rangle$ ein vollständiger orthonormierter Satz aus Eigenfunktionen des Hamiltonoperators mit Eigenwert E_n, d.h. $H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude $c(t)$ durch die Fouriertransformierte der spektralen Funktion

$$w(E) \equiv \sum_n |\langle n|\phi\rangle|^2\,\delta(E - E_n) \tag{10}$$

gegeben ist:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) w(E) \ . \tag{11}$$

Entwickeln Sie dazu den Zustand $|\phi\rangle$ in Eigenfunktionen $|n\rangle$ und verwenden Sie beim Auswerten von $\exp(-iHt/\hbar)\,|n\rangle$ die Eigenwertgleichung. (2 Punkte)

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $c(t)$ für eine spektrale Funktion in Lorentzform

$$w(E) = \frac{\Gamma\hbar}{2\pi} \frac{1}{(E-E_0)^2 + \hbar^2\Gamma^2/4} \qquad \text{mit} \quad E_0 \in \mathbb{R}, \Gamma > 0 \tag{12}$$

durch Fouriertransformation und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ in diesem Fall exponentiell zerfällt. [Hinweis: komplexe Integration mit Residuensatz; Zwischenergebnis: $c(t) = \exp(-iE_0 t/\hbar) \exp(-\Gamma t/2)$.] (2 Punkte)

f) Überlegen Sie sich mit Hilfe von (10), dass die spektrale Funktion $w(E)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte im Energieraum angibt und deshalb

$$\langle H \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, w(E) E \quad \text{und} \quad \left\langle H^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, w(E) E^2 \tag{13}$$

gilt. Bestimmen Sie damit die Unschärfe ΔH für die spektrale Dichte in Lorentzform (12) und beseitigen Sie den scheinbaren Widerspruch der Ergebnisse (exponentieller oder nicht exponentieller Zerfall?) der Teilaufgaben b) und e). (2 Punkte)