Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 8

Aufgabe 20: Dirac-Kamm

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential eines attraktiven Dirac-Kammes

$$V(x) = -\alpha \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - ja) \tag{1}$$

mit Stärke $\alpha > 0$ und Periode $a > 0$. Es sollen die möglichen Energieniveaus E der stationären Schrödingergleichung im Ortsraum $(-\hbar^2\partial_x^2/(2m) + V(x))\Phi(x) = E\Phi(x)$ bestimmt werden.

a) Bestimmen Sie zunächst wie in der Vorlesung für eine beliebige Energie E die Dispersionsbeziehung zwischen Blochscher Wellenzahl $K \in \mathbb{R}$ und Wellenzahl $k \equiv \sqrt{2mE}/\hbar \in \mathbb{C}$ des Teilchens, indem Sie das Bloch-Theorem $\Phi(x + a) = e^{iKa}\Phi(x)$, die Stetigkeit von $\Phi(x)$ und den Sprung von $\Phi'(x)$ an den Stellen der δ-Funktionen verwenden. Bringen Sie die Dispersionsrelation auf die Form

$$\cos(Ka) = \cos(ka) - \beta \frac{\sin(ka)}{ka} \tag{2}$$

und geben Sie die Konstante β an. (2 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Lösungen der Dispersionsrelation graphisch im Falle ungebundener Zustände ($E \geq 0$, d.h. für reelle Wellenzahlen k) in Abhängigkeit des Parameters α. Skizzieren Sie qualitativ die Energiebänder, indem Sie die möglichen Energien E über die Bloch-Wellenzahl K im Bereich $-\pi/a \leq K \leq \pi/a$ auftragen. Für welche Werte von α fällt die Energie $E = 0$ in ein Energieband, für welche Werte in eine Energielücke? (1 Punkt)

c) Der attraktive Dirac-Kamm besitzt gebundene Zustände, wobei die Wellenzahl k wegen $E < 0$ imaginär wird. Schreiben Sie die Dispersionsrelation mittels $k \equiv i\kappa$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$ in eine rein reelle Beziehung um und gehen Sie wie in b) vor. Geben Sie die Energiebänder von a) und b) in einem gemeinsamen Diagramm an (E über K mit $E \in \mathbb{R}$). (1 Punkt)

Aufgabe 21: Lineares Potential

Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit Impuls p in einem unbegrenzten homogenen Schwerefeld

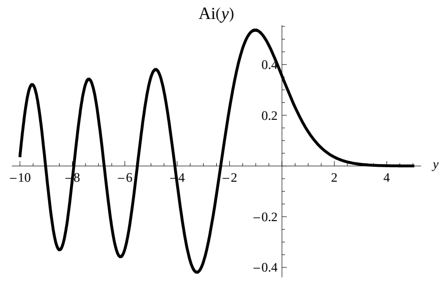
$$V(x) = mgx \tag{3}$$

der Stärke $g > 0$. Es sollen die Eigenzustände der stationären Schrödingergleichung in Ortsdarstellung $(-\hbar^2\partial_x^2/(2m) + V(x))\Psi(x) = E\Psi(x)$ bestimmt werden. Der zu $\Psi(x)$ gehörende Eigenzustand in Impulsdarstellung sei mit $\Phi(p)$ bezeichnet.

a) Wie muss die Energie E geändert werden, damit bei einer Translation des Koordinatensystems $x' = x + a$ die Form der Schrödingergleichung invariant bleibt? Warum genügt es also sich zum Lösen der Schrödingergleichung auf den Fall $E = 0$ zu beschränken? (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie mit einem jeweils geeigneten Produkt aus Potenzen der unabhängigen Konstanten m, g und $\hbar$ eine Zeitskala T_0, eine Längenskala L_0, eine Energieskala E_0 und eine Impulsskala P_0. Gehen Sie anschließend zu dimensionslosen Größen $y \equiv x/L_0$, $\tau \equiv t/T_0$, $k \equiv p/P_0$ und $\epsilon = E/E_0$ über und geben Sie sowohl die dimensionslose Schrödingergleichung im Ortsraum für $\psi(y) \equiv \Psi(L_0 y)\sqrt{L_0}$ als auch im Impulsraum für $\phi(k) \equiv \Phi(P_0 p)\sqrt{P_0}$ an. Warum ist die Schrödingergleichung für ein lineares Potential im Impulsraum einfacher zu lösen als im Ortsraum? Wie lauten die Transformationsgleichungen zwischen $\psi(y)$ und $\phi(k)$? (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die Lösung $\phi_0(k)$ für $\epsilon = 0$ durch Trennung der Variablen bis auf eine Integrationskonstante.



Geben Sie die Lösung in Ortsdarstellung $\psi_0(y)$ mit Hilfe der Airy-Funktion

$$\mathrm{Ai}(y) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \cos\left(\tfrac{1}{3}k^3 + ky\right) \qquad (4)$$

an. Wie lauten die Lösungen $\psi_\epsilon(y)$ und $\phi_\epsilon(k)$ für eine beliebige Energie ϵ? (2 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Integrationskonstante aus c) so, dass die Eigenzustände des Hamiltonoperators im Impulsraum auf die δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \phi^*_{\epsilon'}(k)\phi_\epsilon(k) = \delta(\epsilon' - \epsilon). \qquad (5)$$

normiert sind [Hinweis: Fourierdarstellung $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}/(2\pi)$]. Zeigen Sie, dass dann die Eigenfunktionen die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \phi^*_\epsilon(k')\phi_\epsilon(k) = \delta(k' - k). \qquad (6)$$

erfüllen [Hinweis: Definition $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0)$]. Geben Sie schließlich die normierten Eigenfunktionen $\Psi_E(x)$ in den alten Größen mit Hilfe der Airy-Funktion an. (1 Punkt)

e) Anhand der dimensionslosen Schrödingergleichung im Ortsraum für $\epsilon = 0$ [kurz: SG] soll die Asymptotik des Eigenzustandes $\psi_0(y)$ für $y \to \pm\infty$ bestimmt werden.

i) Welche Differentialgleichung erfüllt die Funktion $f(y)$, wenn $\exp(f(y))$ die Schrödingergleichung SG erfüllt? Geben Sie damit eine Differentialgleichung für die Funktion $g(y) = f'(y) \equiv \partial_y f(y)$ an.

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzansatzes $g_0(y) = c_1 y^{\lambda_1}$ das asymptotische Verhalten von $g(y)$ für $y \to \pm\infty$.

iii) Bestimmen Sie analog die nächste Ordnung mit dem Ansatz $g_1(y) = g_0(y) + c_2 y^{\lambda_2}$.

iv) Wie lautet also das asymptotische Verhalten von $\psi_0(y) \propto \exp(f(y))$ mit $f'(y) = g(y)$? Welches Verhalten ergibt sich für $y \to \infty$ und welches für $y \to -\infty$?

[Hinweis zu ii) und iii): Überlegen Sie sich wie Sie die Exponenten und Vorfaktoren der entsprechenden Summe aus Potenzen von y wählen müssen, damit die Summe im Grenzfall $y \to \pm\infty$ verschwinden kann.] (2 Punkte)

f) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie $\tilde{E}_0$ in peV für ein Neutron im Potential

$$V(x) = \begin{cases} mgx & \text{für } x > 0 \\ \infty & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{[mit } m = 940\mathrm{MeV/c^2}\text{, siehe } \textit{Nature } \mathbf{415}\text{, 297 (2002)]} \qquad (7)$$

mit Hilfe der ersten Nullstelle $y_0 \simeq -2.33811$ der Airy-Funktion $\mathrm{Ai}(y)$. (1 Punkt)