UNIVERSITÄT STUTTGART – II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. U. Seifert
Dr. E. Reister-Gottfried (Zimmer 3.150)

Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 3

Aufgabe 7: Eigenzustände und Erwartungswerte von Spin-1/2-Teilchen

Es sei die Orientierung

$$\mathbf{n}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

eines Stern-Gerlach-Magneten gegeben. Ein System wird nun im Eigenzustand $|\mathbf{n_1}+\rangle$ mit der Richtung $\mathbf{n_1} = \mathbf{n}(\pi/4, \pi/4)$ präpariert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p_\pm(\phi)$ wird bei einem nachfolgenden Stern-Gerlach-Experiment mit Orientierung $\mathbf{n}_2^{(\phi)} = \mathbf{n}(3\pi/4, \phi)$ der Wert $+1$ bzw. -1 gemessen. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie für den Zustand $|\mathbf{n_1}+\rangle$ den Erwartungswert $\langle\sigma_z\rangle$ und die Dispersion $(\Delta\sigma_x)^2$, $(\Delta\sigma_y)^2$ in x- und y-Richtung. Verifizieren Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation aus der Vorlesung mit $A = \sigma_x$, $B = \sigma_y$. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie für den Zustand $|\Psi\rangle = N\left(|z+\rangle + e^{i\alpha}|z-\rangle\right)$ die Normierungskonstante N. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit im Zustand $|\Psi\rangle$, bei einer σ_x-Messung den Wert $+1$ zu erhalten? (1 Punkt)

Aufgabe 8: Teilchen mit Spin 1

Für Teilchen mit Spin 1 liefert der Stern-Gerlach Aufbau drei mögliche Messwerte $\{+1, 0, -1\}$. In der Basis $\{|z+\rangle, |z0\rangle, |z-\rangle\}$ lauten die Analoga zu den Pauli-Matrizen

$$\Sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_x \\ \Sigma_y \\ \Sigma_z \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie den Versuchsaufbau und die möglichen Ausgänge des Experiments. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie $[\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\Sigma_\gamma$. (1 Punkt)

c) Wie lauten die möglichen Messwerte für das Quadrat des Spins $\mathbf{\Sigma}^2 = \Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2$? (1 Punkt)

d) Drücken Sie die Zustände $|x+\rangle, |x-\rangle, |x0\rangle$ in der obigen Basis aus. Das System werde nun im Zustand $|\Psi\rangle = |\mathbf{n}0\rangle$ präpariert mit $\mathbf{n}(\theta, \phi)$ wie in (1). Mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_+, p_-, p_0 werden bei einem Stern-Gerlach-Experiment in x-Richtung die Werte 1, 0 und -1 gemessen? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\Sigma_x\rangle_{|\Psi\rangle}$ und die Dispersion $(\Delta\Sigma_x)^2_{|\Psi\rangle}$. (2 Punkte)

e) Das System werde nun speziell im Zustand $|z+\rangle$ präpariert. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, für Σ_x die Messwerte 1, 0 und -1 zu erhalten? (1 Punkt)