UNIVERSITÄT STUTTGART – II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. U. Seifert
Dr. E. Reister-Gottfried (Zimmer 3.150)

Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 7

Aufgabe 17: Unendlich hoher Potentialtopf (Ergänzungen)

Es sei ein unendlich hoher Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ , & -a \le x \le a \\ \infty \ , & \text{sonst} \end{cases}$$

der Breite $2a$ gegeben. Die Energie-Eigenfunktionen sind dann in Ortsdarstellung gegeben durch

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi x}{2a}\right) & , \ n = 0, 2, 4, \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{2a}\right) & , \ n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

mit den Energie-Eigenwerten $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 (n+1)^2$.

a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen $\phi_n(p)$ in Impulsdarstellung und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho_n(p)$, dass im Zustand $|\phi_n\rangle$ der Impuls p gemessen wird. Plotten Sie $\rho_n(p)$ für die ersten drei Eigenfunktionen $|\phi_n\rangle$, $(n = 0, 1, 2)$ mit $a/\hbar = 1$. (2 Punkte)

b) Das Teilchen befinde sich nun zunächst im Grundzustand eines Potentialtopfes der Breite a mit

$$V(x, t = 0) = \begin{cases} 0 \ , & -a \le x \le 0 \\ \infty \ , & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die rechte Begrenzung instantan nach $x = a$ verschoben

$$V(x, t > 0) = \begin{cases} 0 \ , & -a \le x \le a \\ \infty \ , & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E\rangle (t)$ der Energie nach der Verschiebung.
Hinweis: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{\pi^2}{16}$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie für die Situation aus b) die Wahrscheinlichkeit $p^+(t)$, dass sich das Teilchen bei einer Messung zum Zeitpunkt t in der rechten Hälfte $0 \le x \le a$ befindet. Plotten Sie $p^+(t)$ für $\frac{E_0}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 = 1$.
Hinweis: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)^2-4]^2} = \frac{\pi^2}{64}$. Es können nicht exakt auswertbare, unendliche Summen stehenbleiben. Zum Plotten sollen diese für endliche n abgebrochen werden.

(2 Punkte)

Aufgabe 18: Tunneleffekt

Es sei eine Potentialbarriere

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \ 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

der Höhe $V_0 \geq 0$ und Breite a gegeben. Teilchen mit Energie $E < V_0$ können klassisch die Barriere nicht überwinden. Für ein quantenmechanisches Teilchen gibt es jedoch eine "Tunnelwahrscheinlichkeit", mit der die Barriere überwunden wird.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung in den drei Bereichen mit jeweils konstantem Potential für ein Teilchen der Energie $0 < E < V_0$. (1 Punkt)

b) Es soll nun die Streuung einer einlaufenden Welle der Energie $E < V_0$ an der Potentialbarierre betrachtet werden. Wir nehmen an, dass die einlaufende Welle mit Amplitude A von links auf die Barriere trifft. Auf der rechten Seite der Barriere soll die Wellenfunktion daher keinen Anteil einer (nach links) einlaufenden Welle enthalten. Bestimmen Sie unter diesen Randbedingungen und mit Hilfe der Anschlussbedingungen an den Potentialstufen die Amplituden der reflektierten Welle B und der transmittierten Welle C. (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie daraus die Wahrscheinlichkeiten R und T, dass ein (von links) einlaufendes Teilchen reflektiert/transmittiert wird. Die Tunnelwahrscheinlichkeit T beschreibt dabei die Wahrscheinlichkeit für das (klassisch verbotene) "Durchtunneln" der Potentialbarriere. (1 Punkt)

Aufgabe 19: Doppeltes δ-Potential

Als einfaches Modell für ein Molekül sei das Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \left(\delta(x-a) + \delta(x+a) \right)$$

mit $\kappa_0 > 0$ gegeben. Dies beschreibt ein Elektron mit attraktiver Wechselwirkung zu zwei Atomkernen (den δ-Potentialen) .

a) Prüfen Sie, ob und wie viele gebundene Zustände es gibt (abhängig von κ_0 und a), und bestimmen Sie gegebenenfalls die Wellenfunktion in Ortsdarstellung und den Energie-Eigenwert (Hinweis: graphische Lösung der Eigenwertgleichung). Berechnen Sie den (die) Energie-Eigenwert(e) für $a = 1$, $\kappa_0 = 1$ numerisch (z. B. mit Mathematica). (2 Punkte)

b) Berechnen Sie näherungsweise für $a\kappa_0 \gg 1$ jeweils den Energie-Eigenwert für die gebundenen Zustände. Interpretieren Sie das Ergebnis, indem Sie es mit einem einzelnen δ-Potential (wie in der Vorlesung behandelt) vergleichen. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass Wellenfunktion und Energie-Eigenwert im Grenzfall $a \to 0$ das aus der Vorlesung bekannte Ergebnis für ein einzelnes anziehendes δ-Potential liefern. (1 Punkt)