UNIVERSITÄT STUTTGART – II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. U. Seifert
Dr. E. Reister-Gottfried (Zimmer 3.150)

Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 1

Aufgabe 1: Stern-Gerlach Experimente (maschinenschriftliche Abgabe in Zweiergruppen)

Beschreiben Sie ohne Formeln und ohne Illustration in eigenen Worten die entscheidenden Aspekte der verschiedenen Typen von Stern-Gerlach Experimenten, die in der Vorlesung beschrieben wurden. (maximal 5000 Zeichen) (4 Punkte)

Aufgabe 2: Pauli Matrizen

Die *Pauli-Matrizen* sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass jede 2×2 Matrix A in der Form

$$A = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}A)\mathbb{1} + \sum_{\alpha=x,y,z} (\mathrm{tr}(A\sigma_\alpha))\sigma_\alpha\right] \tag{2}$$

geschrieben werden kann, wobei tr$A$ die Spur der Matrix A angibt. (1 Punkt)

b) Leiten Sie zunächst folgende Beziehung her:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta}\mathbb{1} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma\,, \tag{3}$$

wobei die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wird. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie unter Verwendung von Gl. (3), dass für den Vektor, der aus den drei Pauli-Matrizen gebildet wird, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ und beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\in \mathbb{R}^3$) die Beziehung

$$(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \mathbb{1}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{4}$$

gilt, wobei $\cdot$ und $\times$ als dreidimensionales Skalar- und Vektorprodukt zu interpretieren sind.

(1 Punkt)

d) Beweisen Sie

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\frac{\alpha}{2} - i(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

wobei $\mathbf{n}$ ein Einheitsvektor ist. Die Funktionen sind hierbei über ihre Potenzreihen definiert.

(1 Punkt)

b. w.

Aufgabe 3: Operator-Identitäten

Der Kommutator $[A, B]$ zweier Matrizen, bzw. Operatoren, A und B ist folgendermaßen definiert:

$$[A, B] \equiv AB - BA\,. \tag{6}$$

a) Es sei die Funktion $f(t) \equiv e^{tA} B e^{-tA}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\frac{df(t)}{dt} = [A, f(t)] \quad , \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = [A, [A, f(t)]] \quad , \quad \text{etc.} \tag{7}$$

Leiten Sie damit

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + \frac{t}{1!}[A, B] + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \tag{8}$$

ab. (1 Punkt)

b) Die Matrizen bzw. Operatoren A, B, C erfüllen $[A, B] = iC$ und $[B, C] = iA$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$e^{iBt} A e^{-iBt} = A \cos t + C \sin t\,. \tag{9}$$

(1 Punkt)

c) Es gelte $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Beweisen Sie die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,, \tag{10}$$

sowie

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}\,. \tag{11}$$

(2 Punkte)