UNIVERSITÄT STUTTGART – II. INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. U. Seifert
Dr. E. Reister-Gottfried (Zimmer 3.150)

Übungen: Theoretische Physik II — Quantenmechanik I

SS 2008 Blatt 2

Aufgabe 4: Unitäre Operatoren

Ein unitärer Operator U erfüllt $U^{-1} = U^\dagger$.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von U vom Typ $a_n = e^{i\alpha_n}$ (mit α_n reell) sind. Zeigen Sie dann, dass die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten a_n orthogonal sind.

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass für einen hermiteschen Operator A der Operator $U(s) = e^{-isA}$ unitär ist (mit s reell) und $U(s_1 + s_2) = U(s_1)U(s_2)$ erfüllt. (1 Punkt)

Aufgabe 5: Spur und Determinante

a) Zeigen Sie für beliebige Operatoren A, B, C die Relation

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C.$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass für endlich-dimensionale Operatoren bzw. Matrizen $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ gilt. Zeigen Sie, dass die Spur auch unter zyklischen Vertauschungen

$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$$

invariant ist. Folgern Sie daraus, dass die Spur unabhängig von der Basis ist. (2 Punkte)

c) Lösen Sie die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) = A(t)B$$

für eine Matrix $A(t)$, die von einem Parameter t abhängt. Was ist die Lösung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(t) = BA(t)?$$

(2 Punkte)

d) Machen Sie sich klar, dass $\det(\mathbb{1} + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \,\mathrm{Tr}\, A + O(\varepsilon^2)$ gilt für eine Matrix A und kleines ε. Beweisen Sie damit

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\, A}.$$

(Hinweis: Finden Sie eine Differentialgleichung für $g(t) = \det[\exp(At)]$.) (3 Punkte)

b. w.

Aufgabe 6: Hermitesche Matrizen

Betrachten Sie die vier hermiteschen Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4, die die folgenden Relationen

$$M_i M_j + M_j M_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4)$$

erfüllen sollen.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der Matrizen ± 1 sind. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass die Spur jeder Matrix M_i verschwindet. (1 Punkt)