

Mitschrieb der Vorlesung

# **Darstellungstheorie I**

Wintersemester 2009/10  
Prof. Dr. Richard Dipper

12. Februar 2010

Mitgeschrieben von Stefan Bühler

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Unknown</b>  | <b>3</b>  |
| 1. Unknown . . . . .                                     | 3         |
| 2. Gruppenkonstruktionen und Automorphismen . . . . .    | 3         |
| 3. Operationen von Gruppen auf Mengen . . . . .          | 7         |
| <b>II. Basics und Bruhat-Zerlegung</b>                   | <b>17</b> |
| <b>III. Die spezielle und projektive lineare Gruppen</b> | <b>23</b> |
| <b>IV. Normalteilerstruktur</b>                          | <b>30</b> |
| 1. Satz von Jordan-Hölder . . . . .                      | 30        |
| <b>V. Lineare Darstellung</b>                            | <b>34</b> |
| 1. Grundlagen . . . . .                                  | 34        |
| a). Gruppenalgebren . . . . .                            | 34        |
| b). Tensorprodukte . . . . .                             | 38        |
| c). $KG$ -Moduln Grundlagen . . . . .                    | 41        |
| <b>VI. Charaktere</b>                                    | <b>48</b> |
| 1. Charaktere . . . . .                                  | 48        |
| 2. Charaktertafel . . . . .                              | 54        |
| <b>VII Exkurs in die Kategorientheorie</b>               | <b>58</b> |
| 1. Kategorien . . . . .                                  | 58        |
| 2. Funktoren . . . . .                                   | 60        |
| 3. Natürliche Transformationen . . . . .                 | 63        |
| 4. Adjungierte Funktoren . . . . .                       | 65        |

# I. Unknown

## 1. Unknown

## 2. Gruppenkonstruktionen und Automorphismen

**Definition:** Sei  $X$  eine Menge. Die Freie Gruppe  $\mathbb{F}X$  über  $X$  wird wie folgt konstruiert:  
Ein Wort in  $\mathbb{F}X$  besteht aus einer endlichen Folge

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}, k \geq 0, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, x_i \in X$$

Das leere Wort ( $k = 0$ ) wird als 1 notiert.

Ist für ein  $1 \leq i < k$  in einem Wort  $x_i = x_{i+1}$  und  $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ , so können wir dieses Wort verkürzen, indem wir  $x_i^{\varepsilon_i} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$  entfernen.

Wörter, die nicht mehr verkürzt werden können, heißen unverkürzbar.

Der transitive, symmetrische und reflexive Abschluss des „Kürzens“ definiert eine Äquivalenzrelation;  $\mathbb{F}X$  ist als die Gruppe mit der Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation definiert, wobei die Multiplikation durch Konkatenation der Vertreter definiert wird.

Zwei Wörter sind also äquivalent, wenn man durch Kürzen und Erweitern des einen Wortes das andere erhält.

$\mathbb{F}X$  ist Gruppe mit folgender universeller Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \mathbb{F}X \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \hat{f} \\ & & G \end{array} \quad , \text{ so dass } \hat{f} \circ i = f \text{ und } \hat{f} \text{ Gruppenhomomorphismus.}$$

**Definition:** Man kann das freie Produkt  $G * H$  über den Gruppen  $G$  und  $H$  als Wörter über dem Alphabet  $G \cup H$  definieren.

Das freie Produkt hat folgende universelle Eigenschaft:

Sei  $\varphi : G \times H \rightarrow A$ ,  $G, H, A$  Gruppen,  $\varphi|_{G \times \{1_H\}}$  und  $\varphi|_{\{1_G\} \times H}$  jeweils ein Gruppenhomomorphismus,  $i : (g, h) \mapsto gh$ :

$$\begin{array}{ccc}
 G \times H & \xrightarrow{i} & G * H \\
 \searrow \forall \varphi & & \downarrow \exists! \hat{\varphi} \\
 & & A
 \end{array}
 \quad , \text{ so dass } \hat{\varphi} \circ i = \varphi \text{ und } \hat{\varphi} \text{ Gruppenhomomorphismus.}$$

**Definition:** Gruppen mit Erzeugenden und Relationen:  $X$  eine Menge,  $S \subseteq \mathbb{F}X$  „Relationen“.

Dann ist  $N := \langle \mathbb{F}X S \rangle$  die normale Hülle von  $S$ .

$G = \mathbb{F}X/N$  die Gruppe, die von  $X$  mit den Relationen  $S$  erzeugt wird;  $G := \langle X \mid S \rangle$ .

Beispiele:

i) Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n = \{1, g, \dots, g^{n-1}\} = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$   
 Bem:  $|X| \leq 1 \Leftrightarrow \mathbb{F}X$  ist kommutativ;  $\mathbb{F}X \cong \mathbb{Z} \Leftrightarrow |X| = 1$

ii)  $\sigma_n = \langle \{s_i \mid 1 \leq i < n\} \mid s_i s_j = s_j s_i \text{ f\u00fcr } |i - j| \leq 2, s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \rangle$

Beachte:

$$T \leq S \leq \mathbb{F}X \Rightarrow U := \langle \mathbb{F}X T \rangle \leq \langle \mathbb{F}X S \rangle =: V \\
 \Rightarrow 1. \text{ Iso Satz } \exists \text{ Epimorphismus } \mathbb{F}X/U \rightarrow \mathbb{F}X/v$$

iii) Die endlichen einfachen Gruppen sind (durchweg?) von 2 Elementen erzeugt.

iv) Sei  $G$  Gruppe. W\u00e4hle  $X = G$ , nach universeller Eigenschaft  $\exists!$  Epimorphismus  $\mathbb{F}G \rightarrow G$  mit Kern  $N \Rightarrow G = \mathbb{F}G/N$

**Definition:** Seien  $G, H$  Gruppen. Das direkte Produkt  $G \times H$  ist das kartesische Produkt mit komponentenweiser Multiplikation.

$$G \cong \tilde{G} := G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \times H \trianglerighteq \{1_G\} \times H =: \tilde{H} \cong H$$

$$\text{for all } g \in \tilde{G}, h \in \tilde{H} : gh = hg \Rightarrow \tilde{G}\tilde{H} = \tilde{H}\tilde{G} = G \times H, \tilde{G} \cap \tilde{H} = \{1_{G \times H}\}$$

$\Rightarrow$  Wir m\u00fcssen nicht zwischen externem und internem Produkt unterscheiden.

$$|G \times H| = |G| |H|$$

Betrachte  $H, N \leq G, N \trianglelefteq G \Rightarrow HN = NH, HN \leq G$

Sei zus\u00e4tzlich  $HN = G, H \cap N = \{1\}$

Sei  $n \in N$ . Wegen  $nHn^{-1} = H$  ist  $c_n : H \rightarrow H : h \mapsto {}^n h = nhn^{-1}$  ein Automorphismus von  $H$ .

$n \mapsto c_n$  ist Gruppenhomomorphismus  $N \rightarrow \text{Aut}(H)$ .

**Satz 1.1.2.1:** Sei  $g \in G, c_g : G \rightarrow G : h \mapsto {}^g h$  Automorphismus von  $G$ . Die Menge  $\text{Inn}(G) := \{c_g \mid g \in G\} \subseteq \text{Aut}(G)$  ist Normalteiler von  $\text{Aut}(G)$ .

$\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$  (Gruppe der äußeren Automorphismen von  $G$ )

Die Abbildung  $c : G \rightarrow \text{Aut}(G) : g \mapsto c_g$  ist Gruppenhomomorphismus mit Bild  $\text{Inn}(G)$  (klar) und  $\ker c = Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$

Also ist  $G/Z(G) \cong \text{Inn}(G)$

*Beweis.* Sei  $g, h_1, h_2 \in G$

$$c_g(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = g h_1 g^{-1} g h_2 g^{-1} = c_g(h_1) c_g(h_2)$$

$$c_{g^{-1}} \circ c_g(h) = g^{-1} g h g^{-1} g = 1 h 1^{-1} = c_1(h) = \text{id}_H$$

Also ist  $c_g$  bijektiv und daher Automorphismus von  $G$ .

$c : g \rightarrow \text{Aut}(G)$  ist Homomorphismus:

$$c_{g_1} \circ c_{g_2}(h) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} = c_{g_1 g_2}(h)$$

$$\begin{aligned} c_g = \text{id}_G &\Leftrightarrow c_g(h) = h \forall h \\ &\Leftrightarrow ghg^{-1} = h \forall h \\ &\Leftrightarrow gh = hg \forall h \\ &\Leftrightarrow g \in Z(G) \\ &\Rightarrow \ker c = Z(G) \end{aligned}$$

Da im  $c = \text{Inn}(G)$  ist  $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}(G)$ .

Sei  $\varphi \in \text{Aut}(G), g \in G$ : Zu zeigen:  $\varphi \text{Inn}(G) \varphi^{-1} = \text{Inn}(G) \Leftrightarrow \varphi c_g \varphi^{-1} \in \text{Inn}(G) \forall g, \varphi$

$$(\varphi c_g \varphi^{-1})(h) = \varphi(g \varphi^{-1}(h) g^{-1}) = \varphi(g) h \varphi^{-1}(g) = \varphi(g) h \varphi(g)^{-1} = c_{\varphi(g)}(h) \forall h \in G$$

$$\Rightarrow \varphi c_g \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)} \in \text{Inn}(G)$$

Also ist  $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$  □

Beachte: Sei  $N \leq G$ . Dann ist  $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow c_g(N) = N \forall g \in G$

$$(\Rightarrow c_{g|_N} \in \text{Aut}(N). c_g \text{ ist } \in \text{Inn}(N) \Leftrightarrow \exists n \in N : c_g = c_n)$$

**Definition:** Sei  $H < G$ . Dann ist  $H$  charakteristisch in  $G$ , falls  $\varphi(H) = H \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$ .

Klar:  $H$  char. in  $G \Rightarrow H \trianglelefteq G$ .

Beispiel:

$Z(G)$  ist char. in  $G$ :

$$\forall z \in Z(G), g \in G : \varphi(g) \varphi(z) = \varphi(gz) = \varphi(zg) = \varphi(z) \varphi(g)$$

$$\Rightarrow \varphi(z)G = G \varphi(z)$$

$$\Rightarrow \varphi(z) \in Z(G)$$

**Satz 1.1.2.2:** Seien  $K \leq H \leq G$ ,  $K$  charakteristisch in  $H$ ,  $H$  char. in  $G$ . Dann ist  $K$  char. in  $G$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in \text{Aut}(G)$ . Zu zeigen:  $\varphi(K) = K$ .

$\varphi \in \text{Aut}(G) \Rightarrow_{H \text{ char. in } G} \varphi(H) (= H \Rightarrow_{|_H} \in \text{Aut}(H) \Rightarrow \varphi(K) = \varphi|_K = K$ , da  $K$  char. in  $H$  ist. Also ist  $K$  char. in  $G$ . □

*Bemerkung.* Sei  $S \subseteq G$  mit  $S^{-1} = S$  und  $\varphi(S) = \{\varphi(s) \mid s \in S\} = S$  für alle  $\varphi$  in  $\text{Aut}(G)$  ( $\text{Inn}(G)$ ). Dann ist  $\langle S \rangle \leq G$  char. (normal) in  $G$ .

**Definition:** Sei  $G$  Gruppe,  $a, b \in G$ . Dann ist  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  der Kommutator von  $a$  und  $b$  ( $[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba = ab$ ).

Die Untergruppe  $G' := \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle \leq G$  heißt Kommutatoruntergruppe von  $G$ .

**Satz 1.1.2.3:** Sei  $G$  Gruppe. Dann ist  $G'$  char. in  $G$  (weil  $\varphi[a, b] = [\varphi[a], \varphi[b]] \forall \varphi \in \text{Aut}(G)$  ebenfalls Kommutator ist, und  $[a, b]^{-1} = [b, a]$ ).

$G'$  ist der kleinste Normalteiler von  $G$ , so dass  $G/G'$  abelsch ist (d.h. ist  $N \leq G, G/N$  abelsch  $\Rightarrow N \supseteq G'$ ).

*Beweis.* Siehe Algebra. ( $\pi : G \rightarrow G/N : g \mapsto gN, \pi[a, b] = [\pi(a), \pi(b)] = \dots \in G/N = N$ ), □

**Definition:** Seien  $N, H \leq G, N \trianglelefteq G, G = NH = HN, H \cap N = \{1\}$ . dann heißt  $G$  (internes) semidirektes Produkt von  $N$  mit  $H$ . Wir schreiben  $G = N \rtimes H$ .

Beobachtungen:

a)  $G/N = NH/N \cong H/N \cap H \cong H$ . Also ist  $G/N \cong H$ . Daher ist  $|G| = |N||G/N| = |N||H| = |N \rtimes H|$

b)  $G = N \cdot H \Rightarrow \forall x \in G \exists n \in N \exists h \in H : x = n \cdot h$ . Diese Darstellung ist eindeutig: denn seien  $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$  und sei  $n_1 h_1 = n_2 h_2$ , so folgt  $n_2^{-1} n_1 = h_2 h_1^{-1} \in N \cap H \Rightarrow n_2^{-1} n_1 = h_2 h_1^{-1} = 1 \Rightarrow n_1 = n_2, h_1 = h_2$

c) Allgemein gilt:  $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{1\} \Rightarrow hn = nh \forall n \in N, h \in H$ , denn seien  $h \in H, n \in N \Rightarrow [n, h] = nhn^{-1}h^{-1} = \underbrace{(nhn^{-1})}_{\in H \trianglelefteq G} h^{-1} \in H \cap N = \{1\}$  (die Klammerung analog für  $N$ )

Daher: Ist  $G = N \rtimes H$  und zusätzlich  $H \trianglelefteq G \Rightarrow G = H \times N$  (da  $n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 n_2 h_1 h_2$ )

d)  $G = N \rtimes H, x = n_1 h_1, y = n_2 h_2 \in G \Rightarrow x \cdot y = n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 \underbrace{(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{\in N \trianglelefteq G} h_1 h_2 =$

$(n_1 h_1 n_2)(h_1 h_2) = n' h'$  die eindeutige Darstellung vom Produkt  $x \cdot y$  als Produkt eines Elementes aus  $N$  mit einem Element aus  $H$ .

Die Abb.  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N) : h \mapsto \varphi(h) = \lambda n. {}^h n = \varphi_n = c_{n|_N} \in \text{Aut}(N)$  ist Gruppenhomomorphismus.

e) Multiplikation in  $G$  wird vollständig auf die Multiplikation in  $N$  und Multiplikation in  $H$  und auf  $\varphi$  zurückgeführt:  $n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 \varphi_{h_1}(n_2) h_1 h_2$

f) Ist  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  der triviale Homomorphismus, so ist  $\varphi_n = c_{n|_N} = id_N$  für alle  $h \in H$ , d.h.  $\varphi_h(n) = hnh^{-1} = n \Leftrightarrow hn = nh$ . Dann ist  $H \trianglelefteq \text{Gund}G \cong H \times N$ .

Daher: Ist  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  nicht trivial, so kann  $G$  nicht abelsch sein. ( $\varphi(h) = \varphi_h \neq id_N, h \in H, \Rightarrow n \in N : \varphi_h(n) = hnh^{-1} \neq n \Rightarrow hn \neq nh$ )

**Definition:** Seien  $H, N$  Gruppen, und sei  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N) : j \mapsto \varphi(h) = \varphi_h \in \text{Aut}(N)$  ein Homomorphismus.

Wir definieren das (äußere) semidirekte Produkt  $G = N \rtimes H$  wie folgt:

Als Menge ist  $G$  einfach das kartesische Produkt  $N \times H$ .

Sei  $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$  :

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2), h_1 \cdot h_2)$$

**Satz 1.1.2.4:** Mit obiger Multiplikation wird  $G = N \rtimes H$  zur Gruppe  $N \rtimes H$  mit Einselement  $1_G = (1_N, 1_H)$  und Inverser  $(n, h)^{-1} = (\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$

Seien  $\tilde{N} = N \times \{1_H\} \subseteq N \times H$  und  $\tilde{H} = \{1_N\} \times H \subseteq N \times H$ .

Dann ist  $\tilde{N} \trianglelefteq G, \tilde{H} \leq G, \tilde{N} \cong N, \tilde{H} \cong H$  und  $G = \tilde{N} \rtimes \tilde{H}$  (intern). Für  $\tilde{h} = (1_N, h) \in \tilde{H}, \tilde{n} = (n, 1_H) \in \tilde{N}, h \in H, n \in N$  ist  $\tilde{h}^{-1} \tilde{n} \tilde{h} = (\varphi_h(n), 1_H)$ , d.h.  $c_{\tilde{n}^{-1}|_{\tilde{N}}} \leftrightarrow \varphi_h \in \text{Aut}(N)$

*Beweis.* Übung. □

*Bemerkung.* Sind  $\varphi, \psi$  verschiedene Homomorphismen von  $H \rightarrow \text{Aut}(N)$ , so können  $N \rtimes_{\varphi} H, N \rtimes_{\psi} H$  isomorph oder nicht isomorph sein.

*Beispiel.*  $C_n (\cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)) = N, H = C_2 = \{1, h\}$

$\varphi : H \in \text{Aut}(C_n)$  durch  $\varphi(1) = id_{C_n}, \varphi_h(x) = x^{-1}$

Die Gruppe  $D_{2n} := C_n \rtimes_{\varphi} C_2$  heißt Diedergruppe der Ordnung  $2n$ .

$D_{2n}$  ist die Gruppe der Symmetrien eines regelmäßigen  $n$ -Ecks;  $C_n \trianglelefteq D_{2n}$  ist die Gruppe der Rotationen,  $C_2 = D_{2n}/C_n$  sind die Spiegelungen.

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$$

### 3. Operationen von Gruppen auf Mengen

Im folgenden sei:  $G =$  Gruppe,  $X =$  Menge,  $\sigma_X = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ bij. Abb.}\} =$  „symmetrische Gruppe auf  $X$ “.

**Definition:** Eine (Links-)Operation von  $G$  auf  $X$  ist eine (externe) Verknüpfung

$$G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$$

so dass gilt:

i)  $1_G \cdot x = x \forall x \in X$

ii)  $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

Wir sagen: „ $G$  operiert auf  $X$ “ (durch Permutationen) oder kurz: „ $X$  ist  $G$ -Menge“. (Analog: Rechtsoperation:  $X \times G \rightarrow X$ )

*Bemerkung.* Ist  $X$   $G$ -Menge,  $\sigma_X =$  symmetrische Gruppe auf  $X$ , so wird durch  $\lambda : G \rightarrow \sigma_X : g \mapsto \lambda_g \in \sigma_X$  ein Gruppensomomorphismus  $\lambda$  definiert, wobei  $\lambda_g : X \rightarrow X : x \mapsto g \cdot x$ ; denn: Sei  $g \in G : \lambda_g \lambda_{g^{-1}} : x \mapsto g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = 1_G x = x \forall x \in X$ , also ist  $\lambda_g$  bijektiv und  $\in \sigma_X$ .

Seien  $g, h \in G \Rightarrow \lambda_g \circ \lambda_h(x) = \lambda_g(\lambda_h(x)) = g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x = \lambda_{gh}(x) \forall x \in X \Rightarrow \lambda_g \lambda_h = \lambda_{gh}$ , d.h.  $\lambda$  ist Homomorphismus.

Umgekehrt: Sei  $\varphi : G \rightarrow \sigma_X$  homomorph. Dann wird durch  $g \cdot x := (\varphi(g))(x)$  eine Operation von  $G$  auf  $X$  definiert, mit  $\lambda = \varphi$  (Beweis: Übung).

$\lambda$  heißt „die zur  $G$ -Menge  $X$  gehörende Darstellung von  $G$ “.

Also: Das Konzept der  $G$ -Mengen  $X$  ist äquivalent zum Konzept der Homomorphismen  $G \rightarrow \sigma_X$ .

(Im Falle der Rechtsoperation: Entweder op  $\sigma_X$  auch von rechts, oder die zug. Darst.  $\rho : G \rightarrow \sigma_X$  ist ein Antihomomorphismus)

*Beispiele:* (Running Gag)

1.)  $\sigma_X$  operiert auf  $X$  mit Darstellung  $id_{\sigma_X} : \sigma_X \rightarrow \sigma_X : \pi \mapsto \pi \in \sigma_X, \pi x = \pi(x) \forall x \in X$

2.)  $G$  operiert auf der Menge  $G$  durch Linkstranslation  $g \cdot h = gh$ .

Darstellung:  $\lambda G \rightarrow \sigma_G : g \mapsto \lambda_g; \lambda_g : h \mapsto gh \forall h \in G$   
 $(|\sigma_G| = |G|!)$

3.)  $G$  operiert auf  $G$  durch Konjugation:

$$g \cdot h = {}^g h = ghg^{-1} [= c_g(h)]$$

4.) Sei  $H \leq G, G = \dot{\bigcup}_{i \in I} g_i H$

Wir definieren eine Operation von  $G$  auf der Menge  $G/H$  der Nebenklassen von  $H$  in  $G$  durch:  $g(g_i H) = g_j H$  (bzw. auf  $I : g_i \dot{=} j$ )

(Linkstranslation auf  $G/H$ , Rechtsnebenklassen  $H \backslash G$  durch Rechtstranslation)

Spezialfall:  $H = (I) \Rightarrow$  Operation von  $G$  auf  $G/H = G/(I) = G$  aus 2.)

4.) ist die Mutter aller  $G$ -Operationen auf Mengen.

**Definition:** Eine Operation von  $G$  auf  $X$  heißt treu, falls gilt: Ist  $gx = x \forall x \in X \Rightarrow g = 1$ . Offensichtlich heißt dies für die zugehörige Darstellung  $\varphi : G \rightarrow \sigma_X$ , dass  $\varphi$  injektiv ist; denn



$gx = x \forall x \in X \Leftrightarrow (\varphi(g))(x) = x \forall x \in X \Leftrightarrow \varphi(g) = id_X \Leftrightarrow g \in \ker \varphi$   
 So:  $\ker \varphi = \{g \in G \mid gx = x \forall x \in X\}$ .

*Beispiele:* 1.), 2.) treu, da  $g \cdot h = h \forall h \in G \Leftrightarrow g = 1$

3.) (i.A.) nicht treu. Genauer:  $\ker \varphi = \ker c_g = \{g \in G \mid c_g = id_G\} = \{g \in G \mid c_g(h) = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \forall h \in G\} = Z(G)$  Zentrum von  $G$ .

Klar:  $X$  treue  $G$ -Menge, so enthält  $\sigma_X$  durch die zugehörige Darstellung  $\varphi : G \rightarrow \sigma_X$  eine zu  $G$  isomorphe Untergruppe.

**Definition:** Seien  $X, Y$   $G$ -Mengen. Eine Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  heißt  $G$ -Homomorphismus (auch  $G$ -equivariant) falls gilt:

$$\forall x \in X, g \in G : \varphi(g, x) = g\varphi(x)$$

Wie üblich: Epi-, Mono- und Isomorphismen.

Komposition (und Inversen falls bijektiv) sind wieder Homomorphismen.

Isosätze etc.

Also: Kategorie der  $G$ -Mengen.

Übersetzung für Darstellungen:

Seien  $\varphi : G \rightarrow \sigma_X, \psi : G \rightarrow \sigma_Y$  ( $X, Y$  Mengen) Darstellungen.

Ein Morphismus von  $\varphi$  nach  $\psi$  ist eine Mengenabbildung  $f : X \rightarrow Y$ , so dass  $\forall g \in G$  das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi(g) \downarrow & & \downarrow \psi(g) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$$\text{d.h. } f \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ f \Leftrightarrow \psi(g) \circ f \circ \varphi(g)^{-1} = f \forall g \in G$$

Dies macht die Klasse der (Permutations-) Darstellungen zu einer Kategorie. Diese ist isomorph zur Kategorie der  $G$ -Mengen (Beweis: Übung).

Ziel: Klassifikation von  $G$ -Mengen.

**Definition:**  $X, Y$   $G$ -Mengen:

a) Die disjunkte Vereinigung  $X \dot{\cup} Y$  wird zur  $G$ -Menge durch  $g \cdot z = \begin{cases} gx & \text{für } z = x \in X \\ gy & \text{für } z = y \in Y \end{cases}$   
 („direkte Summe“, „Koproduct“ in Kategorie der  $G$ -Mengen)

b) Das kartesische Produkt  $X \times Y$  wird zu  $G$ -Menge durch  $g \cdot (x, y) = (gx, gy) \forall x \in X, y \in Y, g \in G$

c)  $\sigma_X$  wird  $G$ -Menge durch  $gZ = \{gz \mid z \in Z\}$  für  $Z \subseteq X$

**Definition:** Sei  $X$  eine  $G$ -Menge,  $x \in X$ . Die Bahn (Orbit)  $Gx$  ( ${}^Gx$ ) ist  $\{gx \mid g \in G\} \subseteq X$ , und der Stabilisator  $Stab_G(x)$  in  $G$  von  $x$  ist  $\{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$ .

Für  $S \subseteq G$  ist der  $Stab_G(S) = \{g \in G \mid gs = s\forall s \in S\}$

Der Punktstabilisator von  $S$  in  $G$  ist  $PStab_G(S) = \{g \in G \mid gs = s\forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} Stab_G(s)$

Klar:

1.  $Stab_G(x), Stab_G(S), PStab_G(S)$  sind Untergruppen von  $G$ .
2. Die Einschränkung von der  $G$ -Operation auf die Bahn  $Gx$  macht die Bahn  $Gx$  von  $x$  zur  $G$ -Menge.  
Wir definieren eine Äquivalenzrelation  $\sim_G$  auf  $X$  durch  $x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$   
Die Äquivalenzklasse von  $x \in X$  ist die Bahn  $Gx$ .  
Konsequenz:  $X$  ist die direkte Summe der Bahnen von  $G$  auf  $X$ .

**Definition:**  $G$  operiert (einfach) transitiv auf  $X$ , falls nur eine Bahn existiert, d.h.  $\forall x, y \in X : \exists g \in G : x = gy$ .

*Beispiele:* von 1.3.1

A) Bahnen:

- 1.)  $G$  ist die einzige Bahn.
- 2.)  $\forall h_1, h_2 \in G \exists g \in G : h_2 = gh_1 : g := h_2h_1^{-1}$ , also:  $G$  ist die einzige Bahn.
- 3.)  $g \sim_G h \Leftrightarrow \exists x \in G : h = xgx^{-1} \Leftrightarrow g$  und  $h$  sind konjugiert  $\Leftrightarrow$  Bahnen sind Konjugationsklassen.
- 4.) Eine Bahn.  $g, h \in G \Rightarrow \exists x \in G : h = xg \Rightarrow hH = xgH$

B) Stabilisatoren:

- 1.)  $x \in X : Stab_{\sigma_X}(x) = \{\pi \in \sigma_X \mid \pi(x) = x\} = \sigma_{X \setminus \{x\}}$ , z.Bsp.  $Stab_{\sigma_n}(n) = \sigma_{n-1}$   
 $Stab_{\sigma_n}(\{1, \dots, i\}) = \{\pi \in \sigma_n \mid 1 \leq \pi(j) \leq i \forall 1 \leq j \leq i\} = \sigma_{\{1, \dots, i\}} \times \sigma_{\{i+1, \dots, n\}}$
- 2.)  $h \in G : Stab_G(h) = \{g \in G \mid gh = h\} = \{1\}$
- 3.)  $h \in G : Stab_G(h) = \{g \in G \mid {}^g h = h\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\} =$   
Zentralisator von  $h$  in  $G$ .
- 4.) Spezialfall  $Stab_G(1 \cdot H) = \{g \in G \mid gH = H\} = H$

**Lemma 1.1.3.1:** Sei  $X$   $G$ -Menge,  $x \in X, g \in G$ : Dann ist  $Stab_G(gx) = g \cdot Stab_G(x) \cdot g^{-1}$  („konjugierte Untergruppe“)

*Beweis.* „ $\supseteq$ “ Sei  $h = gfg^{-1} \in$  rechte Seite  $\Rightarrow h(gx) = gfg^{-1}gx = gfx = gx \Rightarrow h \in$  linke Seite. „ $\subseteq$ “ Sei  $h \in \text{Stab}_G(gx)$ , d.h.  $h(gx) = gx \Rightarrow g^{-1}hgx = x \Rightarrow g^{-1}hx = f \in \text{Stab}_G(x) \Rightarrow h = gfg^{-1} \in g\text{Stab}_G(x)g^{-1}$   $\square$

*Beispiele:* von 1.3.1, Stabilisator für 4.):  
 $\text{Stab}_G(xH) = xHx^{-1}$

Neues Beispiel für 1.3.1:

- 5.) Sei  $X = \{H \leq G\}$ . Dann operiert  $G$  auf  $X$  durch Konjugation  $l\text{sup}gH = gHg^{-1}$   
 $\text{Stab}_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = N_G(H)$  der Normalisator von  $H$  in  $G$  (die größte Untergruppe von  $G$  in der  $H$  normal ist,  $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$ )

*Bemerkung.* Bahnen sind in 5.) Konjugationsklassen von Untergruppen.  
 Beachte:  $|c_g(H)| = |gHg^{-1}| = |H|$

**Satz 1.1.3.2:** Jede  $G$ -Menge ist (eindeutig) disjunkte Vereinigung (direkte Summe) von transitiven  $G$ -Mengen, nämlich der Bahnen von  $G$  auf der Menge.

**Satz 1.1.3.3:** Sei  $X$  transitive  $G$ -Menge und  $x \in X, H = \text{Stab}_G(x)$ . Dann ist  $X \cong G/H$  (=  $G$ -Menge der Nebenklassen von  $H$  in  $G$  durch Linkstranslation, siehe Beispiel 4. aus 1.3.1)

*Beweis.* Definiere  $\varphi : G/H \rightarrow X : gH \mapsto gx$  für  $g \in G$ .

- 1.)  $\varphi$  ist wohldefiniert: Denn sei  $gH = fH \Rightarrow f^{-1}g \in H \Rightarrow f^{-1}gx = x$ , da  $H = \text{Stab}_G(x)$  ist  $\Rightarrow gx = fx$
- 2.) Umgekehrt gehts auch: Sei  $fx = gx$  ( $f, g \in G$ )  $\Rightarrow x = f^{-1}gx \Rightarrow f^{-1}g \in H \Rightarrow gH = fH$   
 Also ist  $\varphi$  injektiv.
- 3.) Wegen  $G \cdot x = X$  ist  $\varphi$  surjektiv.
- 4.) Seien  $a, g \in G$  : Dann ist  $a\varphi(gH) = a(gx) = (ag)x = \varphi(agH)$ , also ist  $\varphi$  ein Isomorphismus von  $G$ -Mengen.

$\square$

**Korrolar 1.1.3.4:**  $|X| = |G/H| = [G : H]$

Allgemein: Sei  $X$   $G$ -Menge,  $x \in X \Rightarrow |Gx| = |G : \text{Stab}_G(x)|$  (Bahngleichung)

Wir haben jetzt isomorphe alle  $G$ -Mengen konstruiert, nämlich als disjunkte Vereinigung (direkte Summen) von  $G$ -Mengen der Form  $G/H$  mit  $H \leq G$ .

Frage: Sind  $H, K \leq G$ . Wann ist  $G/H \cong G/K$  als  $G$ -Menge (unter Linkstranslation)?

**Lemma 1.1.3.5:** Seien  $X, Y$   $G$ -Mengen,  $\varphi : X \rightarrow Y$  Homomorphismus, und sei  $x \in X$ . Dann ist  $\text{Stab}_G(x) \leq \text{Stab}_G(\varphi(x))$   
 Insbesondere: ist  $\varphi$  ein Isomorphismus, so ist  $\text{Stab}_G(x) = \text{Stab}_G(\varphi(x))$ .

*Beweis.*  $g \in G : gx = x \Rightarrow g(\varphi(x)) = \varphi(gx) = \varphi(x) \Rightarrow g \in \text{Stab}_G(\varphi(x)) \quad \square$

**Satz 1.1.3.6:** Seien  $H, K \leq G$ . Dann ist  $G/H \cong G/K \Leftrightarrow H =_G K$  (d.h.  $\exists g \in G : gKg^{-1} = H$ ).

Bemerkung: 1.3.6 + 1.3.9 liefert die Klassifikation der  $G$ -Mengen.

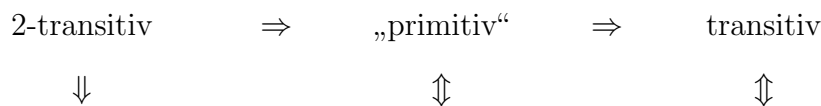
*Beweis.* Sei  $\varphi : G/H \rightarrow G/K$  ein Isomorphismus von  $G$ -Mengen,  $(\exists x \in G) : \varphi(1 \cdot H) = xK \Rightarrow \text{Stab}_G(1 \cdot H) = H = \text{Stab}_G(xK) = x \text{Stab}_G(1 \cdot K)x^{-1} = xKx^{-1}$ . Also ist  $H =_G K$ .  
 Umgekehrt ist  $H =_G K$ , etwa  $K = xHx^{-1}$ . Dann ist (nach 1.3.4)  $K = \text{Stab}_G(xH)$ , und  $G/K \cong G/H$  nach 1.3.6  $\square$

**Definition:** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X$   $G$ -Menge. Dann heißt  $X$   $k$ -fach transitiv ( $k$ -trans.) falls gilt: Sind  $x_1, \dots, x_k \in X$  und  $y_1, \dots, y_k \in X$  jeweils beliebige aber paarweise verschieden, so gibt es  $g \in G : y_i = gx_i \forall 1 \leq i \leq k$   
 (Klar:  $G$  operiert auf  $X^{\times k} = X \times \dots \times X$   $k$ -trans.  $\Leftrightarrow G$  operiert auf  $\{(x_1, \dots, x_k) \in X^{\times k} \mid x_i \text{ paarweise verschieden}\}$  transitiv. 1-transitiv = transitiv)

**Satz 1.1.3.7:** Sei  $X$  2-transitive  $G$ -Menge,  $x \in X$ . Dann ist  $\text{Stab}_G(x)$  maximale Untergruppe von  $G$ .

*Beweis.* 2-transitiv  $\Rightarrow X$  ist transitiv  $\Rightarrow X \cong G/H$  für  $H = \text{Stab}_G(X)$ . Angenommen,  $H$  ist nicht maximal in  $G$ . Sei  $H < K < G, g \in G, g \notin K, k \in K, k \notin H$ . Dann ist  $kH \neq H, gH \neq H$ . Wir haben also zwei Paare  $(H, kH)$  und  $(H, gH)$ . 2-transitiv  $\Rightarrow \exists f \in G : f \cdot (1H) = (1H), f(kH) = gH \Rightarrow f \in H \Rightarrow fk \in K \Rightarrow \exists h \in H : fk = gh \Rightarrow K = fkK = ghK = gK \Rightarrow g \in K$  Widerspruch!  $\square$

**Definition:** Eine transitive  $G$ -Menge  $X$  heißt primitiv  $\Leftrightarrow \forall x \in X : \text{Stab}_G(x)$  maximale Untergruppe von  $G$  ist.



Stab = max. Untergruppe    Stab = max. Untergr.    Stab = bel. Untergr.

**Satz 1.1.3.8:** Eine transitive  $G$ -Menge  $X$  ist primitiv  $\Leftrightarrow$  wenn gilt: Sei  $Y \subsetneq X, |Y| \geq 2$ . Dann gibt es für alle  $g \in G$  Elemente  $y, z \in Y$  mit  $gy \in Y, gz \notin Y$ .

Anwendungen:

**Satz 1.1.3.9:** Sei  $G$  endlich,  $H, K \leq G$ . Es gilt:

$$|H \cdot K| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$$

*Beweis.* Sei  $X = G/K$  eine  $G$ -Menge. Durch Einschränken ist  $G/K$  auch  $H$ -Menge.

Sei  $H_K$  die Bahn von  $K = 1 \cdot K$  unter dieser  $H$ -Operation.

Klar:  $H_K = \{hK \mid h \in H\}$ ,  $HK = \bigcup_{h \in H} hK$ .

Also ist  $HK$  die Vereinigung von  $K$ -Nebenklassen von  $G$  mit Vertretern aus  $H$ .

Also ist  $|HK| = |{}^H K| \cdot |K|$ . Nach 1.3.7 ist  $|{}^H K| = |H : \text{Stab}_H(K)|$

$\text{Stab}_H(K) = \{h \in H \mid hK = K\} = K \cap H$ .

Also ist  $|HK| = |K| \cdot |{}^H K| = |K| \cdot |H : \text{Stab}_H(K)| = |K| \cdot |H : (H \cap K)| = |K| \cdot \frac{|H|}{|H \cap K|}$   $\square$

Konjugationsop:  $|G| = n \in \mathbb{N}$ ,  $1 = g_1, g_2, \dots, g_k$  seien Vertreter der Konjugationsklassen von  $G$ .

$\mathcal{C}_i := {}^G g_i = \{gg_i g^{-1} \mid g \in G\}$  Bahn

$C_i = \text{Stab}_G(g_i) = C_G(g_i) = \{h \in G \mid hg_i = g_i h\} \leq G$

**Satz 1.1.3.10:** Klassengleichung: Sei  $|G| = n$ .

$$n = 1 + \sum_{i=2}^k |G : C_i| = |Z(G)| + \sum_{i=1, \dots, k, g_i \notin Z(G)} |G : C_i|$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung:  $Z(G) = \{g_1, \dots, g_l\}$ ,  $1 \leq l \leq k \Rightarrow C_i = G \forall i = 1, \dots, l, \mathcal{C}_i = \{g_i\}$

Mit 1.3.7  $\Rightarrow_{i=1, \dots, k} |{}^G g_i| = |\mathcal{C}_i| = [G : C_i] = [G : \text{Stab}_G(g_i)]$   $\square$

**Definition:** Sei  $G$  endliche Gruppe,  $G^1 = [G, G]$ . Definiere  $D^i(G) (i \in \mathbb{N})$  durch

1.  $D^1(G) = G^1$
2.  $i > 1 : D^i(G) = [D^{i-1}(G), D^{i-1}(G)]$

Klar:  $D^i(G) \trianglelefteq D^{i-1}(G)$  und  $D^{i-1}(G)/D^i(G)$  abelsch.

$G$  heißt auflösbar, falls  $D^k(G) = (1)$  für ein  $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists (1) = N_1 \leq N_2 \leq \dots \leq N_m = G$  mit  $N_i \trianglelefteq N_{i+1}$  und  $N_{i+1}/N_i$  abelsch (zyklisch, zyklisch von Primzahlordnung nach Korrespondenzsatz).

Kann man zusätzlich  $N_i$  so wählen, dass  $N_i \trianglelefteq G$  ist, so heißt  $G$  Überauflösbar („supersolvable“).

$N \trianglelefteq G$ : mit  $N$  auflösbar,  $G/N$  auflösbar  $\Leftrightarrow G$  auflösbar.

Sei  $Z_i(G)$  induktiv durch folgendes definiert:

i)  $Z_1(G) = Z(G) \trianglelefteq G$  (charakteristisch)

ii)  $Z_2(G)$  ist volles Urbild von  $Z(G/Z(G))$  in  $G$  unter natürlicher Projektion  $G \rightarrow G/Z(G)$ .  
 Beachte: Nach Korrespondenzsatz (1.2.10) gilt:  $Z_2(G) \trianglelefteq G$ .  
 $(Z_2(G) = \{g \in G \mid gZ(G) \in Z(G/Z(G))\})$

iii)  $i > 1$ :  $Z_i(G)$  ist volles Urbild von  $Z(G/Z_{i-1})$  in  $G$ ,  $Z_i(G) \trianglelefteq G$ .

Haben: (1) =  $Z_1(G) \trianglelefteq Z_2(G) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq Z_i(G) \trianglelefteq \dots$   
 $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)$  abelsch,  $Z_i(G) \trianglelefteq G$ . (Beweis: Übung)  
 $G$  heißt nilpotent, falls  $\exists k \in \mathbb{N} : Z_k(G) = G$ .  
Beachte: nilpotent  $\Rightarrow$  überauflösbar  $\Rightarrow$  auflösbar

**Korrolar 1.1.3.11:** Sei  $G$  eine  $p$ -Gruppe,  $p$  Primzahl (d.h.  $\exists t \in \mathbb{N} : |G| = p^t$ ), Dann ist  $|Z(G)| > 1$ .  
 Insbesondere ist  $G$  nilpotent.

*Beweis.*  $x \in G, x \notin Z(G) \Rightarrow C_G(x) \subsetneq G \Rightarrow [G : C_G(x)]$  wird von  $p$  geteilt.

Klassengleichung:  $|G| = p^t = |Z(G)| + \sum_{i=1}^k |G : C_G(g_i)|$

$p$  teilt  $|G : C_G(g_i)| \Rightarrow p$  teilt die Summe  $\Rightarrow p$  teilt  $|Z(G)|$ .

Rest: Übung. □

*Bemerkung.* Berühmte Ergebnisse:

I) Burnside's  $pq$ -Theorem: Seien  $p, q$  Primzahlen,  $|G| = p^a \cdot q^b, a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow G$  ist auflösbar.

II) Feit-Thompson: Ist  $2 \nmid |G| \Rightarrow G$  ist auflösbar.

Beachte: Sei  $H \leq G$ . Dann ist  $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow H$  ist Vereinigung von (disjunkten) Konjugationsklassen von  $G$ ; denn  $gHg^{-1} = H \forall g \in G$  gilt genau dann, wenn  $\forall h \in H, g \in G : c_g(h) = ghg^{-1} \in H$ , d.h.  ${}^G H \subseteq H$ . Daher ist  $|H| = \sum_{g_i \in H} |C_i|$

Erinnerung: Sei  $H \leq G$ . Dann ist  $N_g(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \leq G$  und  $H \trianglelefteq N_G(H) =$  die eindeutig bestimmte größte Untergruppe von  $N$ , in der  $H$  normal ist.  $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow N_G(H) = G$ .

**Satz 1.1.3.12:** Sei  $|G| = n < \infty$ , und sei  $H \leq G$ . Sei  $\mathcal{A} = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ . Dann ist  $|\mathcal{A}| = |G : N_G(H)|$ .

*Beweis.*  $G$  operiert auf  $\sigma(G)$  ( $\{K \leq G\}$ ) per Konjugation, und  $\mathcal{A}$  ist gerade die Bahn  ${}^G H$  von  $H$  unter dieser Operation.  $N_G(H) = \text{Stab}_G(H)$ . So folgt die Behauptung aus 1.3.7. □

**Definition:**  $H, K \leq G, z \in G$ . Dann heißt  $H z K = \{h z k \mid h \in H, k \in K\}$  die  $H$ - $K$ -Doppelnebenklasse von  $z$ .

Definiere  $\sim$  auf  $G$  durch  $, y \in G$ , so ist  $x \sim y \Leftrightarrow \exists h \in H, k \in K : y = h x k$

i)  $x = 1_H x 1_K \Rightarrow x \sim x \forall x \in G$

ii)  $y = h x k \Rightarrow x = h^{-1} y k^{-1} \Rightarrow$  Symmetrie

iii)  $y = h_1 x k_1, z = h_2 y k_2 \Rightarrow z = h_2 h_1 x k_1 k_2 \Rightarrow x \sim z$

Also ist  $G$  disjunkte Vereinigung der  $H$ - $K$ -Doppelnebenklassen.

Klar:  $H z K = \bigcup_{h \in H} h z K = \bigcup_{k \in K} H z k$  ist (disjunkte) Vereinigung von  $K$ -Links- bzw  $H$ -Rechtsnebenklassen in  $G$ .

**Satz 1.1.3.13:** Sei  $|G| = n < \infty, H, K \leq G$  und  $z \in G$ . Dann gilt:

$$|H z K| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap z K z^{-1}|} = \frac{|H| \cdot |K|}{|z^{-1} H z \cap K|} = [H : (H \cap z K z^{-1})] \cdot |K| = |H| \cdot [K : (z^{-1} H z \cap K)]$$

Das kommt nicht von ungefähr: Ist  $h_1 = 1, h_2, \dots, h_l \in H$  ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von  $H \cap z K z^{-1}$  in  $H$ , d.h.  $H = \dot{\bigcup}_{i=1, \dots, l} h_i (H \cap z K z^{-1})$ , so ist  $H z K = \dot{\bigcup}_{j=1, \dots, m} h_j z K$ .

Analog  $K = \dot{\bigcup}_{j=1, \dots, m} (z^{-1} H z \cap K) \cdot k_j, H z K = \dot{\bigcup}_{j=1, \dots, m} H z k_j$

Beweisidee:  $h \in H \cap z K z^{-1} \Leftrightarrow \exists k \in K : h = z k z^{-1} \Leftrightarrow h z K = z k z^{-1} z K = z k K = z K \Rightarrow h_i (z^{-1} H \cap K) z K = h_i z K$ , Details Übung.

*Beweis.* a)  $|H z K| = |H z K z^{-1}| \stackrel{1.3.12}{=} \frac{|H| \cdot |z K z^{-1}|}{|H \cap z K z^{-1}|} = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap z K z^{-1}|} = \frac{|H| \cdot |K|}{|z^{-1} H z \cap K|}$

b) 2. Beweis:  $G$  operiert auf  $G/K$  wie üblich, also auch  $H$  durch Einschränkung.  $H z K$  ist die Vereinigung der Nebenklassen, die in  ${}^H z K$  liegen. Daher ist  $|H z K| = |K| \cdot$  Bahnlänge  $|{}^H z K|$ . Nun ist  $\text{Stab}_H(zK) = \{h \in H \mid h z K = z K\}$ . Aber  $h z K = z K \Leftrightarrow z^{-1} h z = k \in K \Leftrightarrow h = z k z^{-1}$  ist  $\exists k \in K$ .

Also ist  $\text{Stab}_H(zK) = H \cap z K z^{-1} \stackrel{1.3.7}{\Rightarrow} |H z K| = |K| [H : H \cap z K z^{-1}] = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap z K z^{-1}|}$

□

$F$  ist ein Körper,  $n \in \mathbb{N}, G = \text{GL}_n(F) \cong \text{Aut}_F(V), v = F$ -Vektorraum mit  $\dim_F(V) = n$   
 $G = \{A \in F^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} =$  volle lineare Gruppe.  
 $SL_n(F) = \{A \in F^{n \times n} \mid \det A = 1\} =$  spezielle lineare Gruppe.  
 $Z(G) = \{\alpha \cdot E_{n \times n} \mid 0 \neq \alpha \in F\}$

$$Z(\mathrm{SL}_n(F)) = Z(G) \cap \mathrm{SL}_n(G), \text{ da } G = \mathrm{SL}_n(F) \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Z(\mathrm{SL}_n(F)) = \{\alpha \cdot 1_G \mid 0 \neq \alpha \in F, \alpha^n = 1\}$$

$$\mathrm{PSL}_n(F) = \mathrm{SL}_n(F)/Z(\mathrm{SL}_n(F)) = \text{„projektive spezielle lineare Gruppe“}$$

Ziel:  $\Gamma = \mathrm{PSL}_n(F), \Gamma \neq \mathrm{PSL}_n(\mathrm{GF}(q))$  für  $n = 2, q = 2, 3$  und  $n = 3, q = 2$ , dann ist  $\mathrm{PSL}_n(F)$  einfach.

Notation:  $|F| = \mathrm{GF}(q) = \mathbb{F}_q$  Körper mit  $q$  Elementen,  $q = p^a, p$  Primzahl,  $a \in \mathbb{N}$ .

$$G = \mathrm{GL}_n(q), \mathrm{SL}_n(F) = \mathrm{SL}_n(q), \mathrm{PSL}_n(F) = \mathrm{PSL}_n(q)$$

$$|G| = \prod_{k=1}^n (q^n - q^{k-1}) = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1)$$

$$|\mathrm{SL}_n(q)| = \frac{|\mathrm{GL}_n(q)|}{q-1}, |\mathrm{PSL}_n(q)| = \frac{|\mathrm{SL}_n(q)|}{|\{\alpha \mid \alpha^n = 1 \in F\}|}$$



## II. Basics und Bruhat-Zerlegung

**Satz 1.2.14:**  $|\mathrm{GL}_n(q)| = \text{oben (Algebra)}$

**Definition:**  $T := \{\text{Diagonalmatrizen in } G = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid 0 \neq \alpha_i \in \mathbb{F}_q\}$ ,  $|T| = (q-1)^n$ , Standard (Split) „Torus“

$B := \{A = \text{obere Dreiecksmatrizen in } G \mid \det A = \prod \alpha_i \neq 0\}$ , Standard „Boreluntergruppe“ von  $G$

Klar:  $T \leq B \leq G$  „Borus“, „Torel“;  $A \in B \Rightarrow A^{-1} \in B$ ;  $X, Y \in B \Rightarrow XY \in B$ , also  $B \leq G$ .

$U = \{A \in B \mid \text{Diagonaleinträge von } A \text{ sind } 1\} \leq B$

$A \in B, X \in U : AXA^{-1} \in U \Rightarrow U \trianglelefteq B$

Klar:  $U \cap T = (1_G)$ .

Sei  $A \in B \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \in U$

d.h.  $Y \in T, A \cdot Y = X \Rightarrow A = X \cdot Y^{-1}$ . Also ist  $B = U \cdot T$ .

**Definition:** i) Eine Untergruppe von  $G$ , die konjugiert zu  $B$  ist, heißt Boreluntergruppe von  $G$ .

ii) Sei  $\xi = (e_1, \dots, e_n)$  natürliche Basis von  $\mathbb{F}_q^n$ , Für  $\pi \in \sigma_n$  sei  $\xi_\pi = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$ . Sei  $E_\pi = m_{\text{id}}(\xi, \xi_\pi)$  Basiswechsellmatrix von  $\xi$  nach  $\xi_\pi$

Beispiel:  $\pi = (2, 3, 1) : E_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Permutationsmatrix zu } \pi$ .

Beachte: Matrix-Einheit:  $e_{ij} = (\delta_{rs}) \in M_{n \times n}(\mathbb{F}_q)$

$$E_\pi = \sum_{i=1}^n e_{\pi(i)i}$$

**Definition:** Eine Permutationsmatrix  $A \in M_{n \times n}(F)$  ist eine Matrix, die in jeder Spalte und Zeile genau einen von 0 verschiedenen Eintrag hat, der 1 ist.

Sei  $A$  Permutationsmatrix. Definiere  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  durch  $\pi(i) = j \Leftrightarrow A_{\pi(i)j} = 1$ .

Also ist  $\pi \mapsto E_\pi$  eine Bijektion von  $\sigma_n$  in  $W := \{\text{Permutationsmatrizen}\}$ .

Seien  $\sigma, \pi \in \sigma_n$ . Dann ist  $E_\pi \cdot E_\sigma = (\sum_{i=1}^n e_{\pi(i)i}) (\sum_{j=1}^n e_{\sigma(j)j}) = \sum_{i,j} \sigma_{i,j} e_{\pi(i)i} e_{\sigma(j)j} = \sum_{j=1}^n e_{\pi\sigma(j)j} =$

$E_{\pi\sigma}$ .

Also ist  $\pi \mapsto E_\pi$  ein Isomorphismus von  $\sigma_n$  in  $W$ , insbesondere ist  $W \leq G$ ,  $W$  heißt „Weylgruppe“ von  $G$ .

**Satz 1.2.15:** Die Menge  $W$  der Permutationsmatrizen in  $G = \text{GL}_n(F)$  ist Untergruppe von  $G$  und isomorph zu  $\sigma_n$ .

Beachte: Sei  $\pi \in W \Rightarrow \det \pi = \text{sign } \pi \in \{-1, +1\}$

*Bemerkung.* Ist  $E_\pi$  Permutationsmatrix zu  $\pi \in \sigma_n$ ,  $M \in F^{n \times n}$ , so entsteht  $\pi \cdot M = E_\pi M$  aus  $M$  durch entsprechende Zeilenpermutationen und  $M\pi$  durch entsprechende Spaltenpermutationen.

$\sigma_n$  operiert auf der natürlichen Basis  $\xi \rightsquigarrow \xi_\pi = (e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$ .

**Definition:** Sei  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , und sei  $\alpha \in F$ . Dann sei  $x_{ij}(\alpha) \in F^{n \times n}$  die entsprechende

Elementarmatrix  $A = (\alpha_{st})$  mit  $\alpha_{st} = \begin{cases} 1 & \text{für } s = t \\ \alpha & \text{für } s = i, t = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$x_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \alpha \text{ an Position } i, j$$

Die Matrizen  $x_{ij}(\alpha)$  und ihre  $G$ -konjugierten heißen Transvektionen.

Beachte:  $x_{ij}(\alpha) \cdot M$  entsteht aus  $M$  durch Addition von Reihe (Spalte)  $j$  mal  $\alpha$  zu Zeile (Spalte)  $i$  ( $M \cdot x_{ij}(\alpha)$ ).

**Lemma 1.2.16:** Seien  $\alpha, \beta \in F$ ,  $i \neq j$ ,  $\pi \in W$

- i)  $\det(x_{ij}(\alpha)) = 1$ , also ist  $x_{ij}(\alpha) \in \Omega_n(F) \leq \text{GL}_n(F)$ .
- ii) Ist  $\alpha \neq 0$ , so ist  $x_{ij}(\alpha) \in B \Leftrightarrow i < j$ . ( $U \leq B$ )
- iii)  $x_{ij}(\alpha)x_{ij}(\beta) = x_{ij}(\alpha + \beta)$ ,  $x_{ij}(\alpha)^{-1} = x_{ij}(-\alpha)$ . So ist  $X_{ij} = \{x_{ij}(\alpha) \mid \alpha \in F\} \leq G$  die sogenannte Wurzeluntergruppe zur Wurzel  $(j - i)$ ;  $X_{ij} \cong (F, +)$
- iv) Sind  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  paarweise verschieden, so ist  $[x_{ij}(\alpha), x_{jk}(\beta)] = x_{ik}(\alpha\beta)$
- v) Ist  $\pi \in \sigma_n$ , so ist  $\pi x_{ij}(\alpha) \pi^{-1} = x_{\pi(i)\pi(j)}(\alpha)$
- vi) Bemerkung von oben.

*Beweis.* i),ii) trivial.

- iii) Beachte:  $x_{ij}(\alpha) = E + \alpha e_{ij}$   
 $(E + \alpha e_{ij})(E + \beta e_{ij}) = E + (\alpha + \beta)e_{ij} + \alpha\beta e_{ij}e_{ij} = E + (\alpha + \beta)e_{ij} = x_{ij}(\alpha + \beta)$ .  
 $\Rightarrow x_{ij}(\alpha) \cdot x_{ij}(-\alpha) = x_{ij}(0) = E = 1 \Rightarrow x_{ij}(\alpha)^{-1} = x_{ij}(-\alpha)$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } [x_{ij}(\alpha), x_{jk}(\beta)] &= (E + \alpha e_{ij})(E + \beta e_{jk})(E - \alpha e_{ij})(E - \beta e_{jk}) \\
 &= (E + \alpha e_{ij} + \beta e_{jk} + \alpha\beta e_{ik}) \cdot (E - \alpha e_{ij} - \beta e_{jk} + \alpha\beta e_{ik}) \\
 &= E - \alpha e_{ij} - \beta e_{jk} + \alpha\beta e_{ik} + \alpha e_{ij} - 0 - \alpha\beta e_{ik} + 0 + \beta e_{jk} - 0 + 0 + \alpha\beta e_{ik} - 0 - 0 + 0 \\
 &= E + \alpha\beta e_{ik} = x_{ik}(\alpha \cdot \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v) Beachte: } \pi e_{ij} &= e_{\pi(i)j} \text{ wegen vi). } e_{ij}\pi^{-1} = e_{i\pi(j)}; \text{ denn } E_\pi = \sum_{s=1}^n e_{\pi(s)s} \\
 \Rightarrow E_\pi e_{ij} &= \sum_{s=1}^n e_{\pi(s)s} e_{ij} = e_{\pi(s)j}, e_{ij} E_{\pi^{-1}} = \sum e_{ij} e_{\pi^{-1}(s)s} = e_{i\pi(j)} \\
 \Rightarrow \pi x_{ij}(\alpha) \pi^{-1} &= \pi(E + \alpha e_{ij}) \pi^{-1} = \pi E \pi^{-1} + \alpha \pi e_{ij} \pi^{-1} = E + \alpha e_{\pi(i)\pi(j)} = x_{\pi(i)\pi(j)}(\alpha)
 \end{aligned}$$

□

Ziel:  $G = \bigcup_{w \in W} BwB$ , insbesondere: es gibt  $n!$  viele  $B$ - $B$ -Doppelnebenklassen in  $G$  ( $U$ - $B$ - $B$ - $U$ ). „Bruhat-Zerlegung“

**Lemma 1.2.17:** Sei  $M \in G$ . Dann gibt es ein  $b \in B(U)$  so, dass gilt:

Für  $1 \leq i \leq n$  gibt es eine eindeutig bestimmte Zeile  $k_i$  in  $b \cdot M$  so, dass der  $i$ -te Eintrag in dieser Zeile der erste von 0 verschiedene Eintrag in ihr ist, und  $\{k_1, \dots, k_n\} = \{1, \dots, n\}$ ;  $i \mapsto k_i \in \sigma_n$ .

*Beweis.* Die 1. Spalte von  $M$  kann nicht die 0-Spalte sein  $\Rightarrow \exists k_1$  so, dass Eintrag  $k_i$  in  $M = (\alpha_{rs})$  ungleich 0 aber  $\alpha_{r1} = 0$  für  $r > k_1$  ist. (Der letzte von 0 verschiedene Eintrag in der Spalte).

Durch elementare Zeilentransformationen  $(x_{1,l}(\frac{-\alpha_{l,1}}{\alpha_{k_1,1}}), l < k_1)$  aus  $U$  kann man  $M'$  erhalten, in der  $k_i$  der einzige von 0 verschiedene Eintrag in der 1. Spalte ist.

Streiche 1. Spalte und  $k_1$ -te Zeile und arbeite induktiv weiter. □

**Satz 1.2.18:**  $G = BWB = \bigcup_{w \in W} BwB$  (bzw.  $UwB$  oder  $BwU$ ).

*Beweis.*  $M \in G, b \in B, k_i$  wie in 2.1.5 gewählt. Die Abbildung  $i \mapsto k_i$  ist Permutation  $\pi = \pi_M \in \sigma_n$ .

Sei  $w = \pi^{-1}$ . Dann ist  $wbM = \tilde{b} \in B \Rightarrow M = b^{-1}\pi\tilde{b} \in B\pi B$ .

Beachte: 2.1.5 konstruiert  $\pi_M$  für  $M$ . □

**Lemma 1.2.19:** Seien  $w_1, w_2 \in W$  und  $b \in B$ , so dass  $w_1 b w_2 \in B$  ist, dann ist  $w_1^{-1} = w_2$ .

*Beweis.* Sei  $1 \leq j \leq n$  beliebig und sei  $i = w_1^{-1}(j)$ , also  $w_1(i) = j$ .

Sei wieder  $E = (e_1, \dots, e_n)$  natürliche Basis von  $F^n$ , so ist  ${}_1^{-1}(e_j) = e_i$ .

Dann ist Zeile  $j$  von  $w_1 b$  gleich Zeile  $i$  von  $b$ .

Sei  $k = w_2^{-1}(i)$ , d.h.  $w_2(k) = i$ , dann ist Spalte  $k$  von  $w_1 b w_2$  gleich Spalte  $i$  von  $w_1 b$ .

Es sei  $\beta = (b)_{ii} \in F$ .  $\beta \neq 0$  ( $b \in B$ );  $\beta$  ist auch  $(w_1 b)_{ji}$  und  $(w_1 b w_2)_{jk}$  (und immer noch  $\neq 0$ )

$\Rightarrow j \leq k$ , da  $w_1 b w_2 \in B$

Wir haben  $w_2^{-1} w_1^{-1}(j) = w_2^{-1}(i) = k \geq j \Rightarrow w_2^{-1} w_1^{-1} = 1 \Rightarrow w_1 = w_2^{-1}$   $\square$

**Korollar 1.2.20:** Seien  $w, w' \in W, w \neq w'$ . Dann ist  $BwB \cup Bw'B = \emptyset$ , und daher  $G = \bigcup_{\pi \in W} B\pi B$ .

*Beweis.* Sei  $BwB \cap Bw'B \neq \emptyset \Rightarrow BwB = Bw'B \Rightarrow \exists b, b' : w' = bw b'$   
 $\Rightarrow w^{-1} b^{-1} w' = b' \in B \Rightarrow w^{-1} = (w')^{-1} \Rightarrow w = w'$   $\square$

*Bemerkung.* In 2.1.5 wird das eindeutig bestimmte  $w \in W$  für  $M \in G$  konstruiert so, dass  $M \in BwB$  ist.

**Lemma 1.2.21:** Sei  $b \in B$ . Dann gibt es ein Produkt  $t$  von Transvektionen so, dass  $t \cdot b$  Diagonalmatrix ist, die dieselben Diagonaleinträge wie  $b$  hat.  
 Beweis klar.

**Satz 1.2.22:**  $G$  wird von  $T \leq G$  und der Menge der Transvektionen erzeugt.

*Beweis.* Sei  $H$  die Untergruppe von  $G$ , die von diesen Matrizen erzeugt wird.

Zu zeigen:  $H = G$

Wegen 2.1.10 ist  $B \leq H$ , und daher genügt es wegen der Bruhat-Zerlegung 2.1.8 zu zeigen, dass  $w \in H \forall w \in W$ .

Dafür genügt es zu zeigen:  $\tau_{i,j} \in \sigma_n$  ist in  $H$  enthalten:

$E_{\tau_{i,j}} = \sum_{s \neq i, s \neq j} e_s s + e_i j + e_j i = x_{ji}(1) x_{ij}(-1) x_{ji}(1) \cdot D, D$  Diagonalmatrix.

$$w = x_{ji}(1) x_{ij}(-1) x_{ji}(1), w e_k = \begin{cases} e_n & \text{für } k \neq i, k \neq j \\ e_j & \text{für } k = i \\ -e_i & \text{für } k = j \end{cases} \quad \square$$

Missing: 17.11.2009

$$P_f = U_f \rtimes L_f$$

Beispiele:  $V = F^n, \xi = (e_i, \dots, e_n), V_i = \langle e_i, \dots, e_{n_i} \rangle, 0 < n_1 < \dots < n_k = n, f = \overline{(V_1, \dots, v_n)}$

Beachte:  $V_i = V_{i-1} \oplus y_i, y_i := \langle e_{n_{i-1}+1}, \dots, e_{n_i} \rangle$

$v_i = n_i, v_2 = n_2 - n_1, v_3 = n_3 - n_2, \dots, v_k = n_k - n_{k-1}, v_i = \dim_F(y_i)$

$L_f = \{\text{Matrix mit von } 0 \text{ verschiedenen Blöcken der Größen } v_i \times v_i \text{ auf der Diagonale aus } G\}$

...

$v = (v_1, \dots, v_k) \models n$  Wir schreiben  $P_v = U_v \rtimes L_v$  anstatt  $P_f, L_f, U_f$ . ( $\nu = (n) \Rightarrow P_{(n)} = G = L_{(n)}, U_{(n)} = (1)$ )

Sonderfall:  $v = (1^n) = (1, \dots, 1) \models n, P_v = B = u \cdot T$ , Borus.

**Definition:** Eine  $n \times m$ -Matrix  $A$  heißt (untere) unitriangulär, falls folgendes gilt:  $A_{ii} = 1, A_{ij} = 0 \forall i < j$  (allgemeine untere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonale), analog obere.

**Lemma 1.2.23:** Sei  $V = F^n, f = (W_1, \dots, W_n)$  mit  $W_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, \xi = (e_1, \dots, e_n)$  natürliche Basis von  $V$ .

Sei  $X$  ein  $B$ -invarianter Unterraum von  $V$ , d.h.  $bx \in X \forall b \in B, x \in X (\Rightarrow bX = X)$ .

Dann ist  $W = W_i$  für ein  $1 \leq i \leq n$ .

*Beweis.* Sei  $1 \leq k \leq n$  minimal mit  $X \subseteq W_k$ . Wir zeigen:  $X = W_k$ .

Dann existiert ein  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$  mit  $\alpha_k \neq 0$  (da  $k$  minimal).

...  $\exists b \in B : b \cdot x = e_k \Rightarrow e_k \in X$

Nun ist  $(E + e_{k-1,k})e_k = e_k + e_{k-1} \in X \Rightarrow e_{k-1} \in X$ , analog  $\forall i \leq k : e_i \in X \Rightarrow W_k \subseteq X \Rightarrow W_k = X$ . □

**Satz 1.2.24:** Sei  $B \leq H \leq G$ . Dann ist  $H$  eine Standardparabolische Untergruppe, d.h.  $\exists \nu \models n, H = P_\nu$

*Beweis.* Sei  $X$  ein  $H$ -invarianter Unterraum von  $V$ . Dann ist  $X$  auch  $B$ -invariant, weil  $B \subseteq H$ . Also gibt es ein  $1 \leq i \leq n : X = W_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, \xi = (e_1, \dots, e_n)$  natürliche Basis wegen 2.2.5.

Seien  $W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_r}$  mit  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r = n$  genau die  $H$ -invarianten Unterräume von  $V$ .  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r), W_{\alpha_i} = \langle e_1, \dots, e_{\alpha_i} \rangle F_{\underline{\alpha}} = (W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_r})$  ist  $H$ -invariante Fahne von Dimensionstyp  $\underline{\alpha}$ .

Sei  $\mu_1 = \alpha_1, \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \mu_r = \alpha_r - \alpha_{r-1} \Rightarrow \mu = (\mu_1, \dots, \mu_r) \models n$ .

$\text{Stab}_G(F_{\underline{\alpha}}) = P_\mu, H \leq P_\mu$

Zu zeigen:  $H = P_\mu$ .

Spezialfälle

1.)  $r = 1, \mu = (n), P_\mu = G$

Zu zeigen:  $H = G$

$\langle He_1 \rangle = H$ -invarianter Unterraum  $\Rightarrow V = \langle He_1 \rangle \Rightarrow \exists h \in H : he_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$  mit  $\alpha_n \neq 0$

Bruhat-Zerlegung:  $h \in BwB, \exists w \in W$

2.1.9 und 2.1.5  $\Rightarrow$  Für  $g \in BwB$  hat  $g$  als Matrix die Form ...

d.h. hier für  $h \in BwB : w(1) = n$

Beachte: Wegen  $B \subseteq H$  ist  $h = b_1 w b_2 \Rightarrow w = b_1^{-1} h b_2^{-1} \in H$

Sei  $1 < j \leq n$  mit  $w(j) = 1$  (Ohne Einschränkung  $n \geq 2$ )

Dann ist  $X_{1j} = \{x_{1j}(\alpha) | \alpha \in F\} \subseteq B \subseteq H$

$X_{n1} = X_{w(1)w(j)} = w X_{1j} w^{-1} \in H$  (mit 2.1.4)

Sei  $1 \leq i < m < n \Rightarrow X_{im} \subseteq B \subseteq H$

Dann ist  $X_{nm}(\alpha) = [x_{n1}(\alpha), x_{1m}(1)] \in H \forall \alpha \in F$  (mit 2.1.4)

$\Rightarrow X_{nm} \subseteq H$

$\forall 1 \leq i < n : x_{i1}(\alpha) = [x_{in}(\alpha), x_{n1}(1)] \in H \Rightarrow X_{i1} \subseteq H$

$\forall 1 < i, m \leq n, i \neq m : x_{im}(\alpha) = [x_{i1}(\alpha), x_{1m}(1)] \in H \Rightarrow X_{im} \subseteq H$

Wir haben gezeigt  $X_{ij} \subseteq H \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$

Da  $T \subseteq B \subseteq H \Rightarrow H = G$ .

2.)  $r = 2, I_\alpha = W_m \not\leq V = W_n$

Wir wissen schon:  $H \leq P_\mu, \mu = (m, n - m) \vdash n$

Klar:  $U_\mu \subseteq B \subseteq H, P_\mu = U_\mu \rtimes L_\mu$ , es genügt also zu zeigen:  $L_\mu \subseteq H$ .

$L \cong \text{GL}_m(F) \times \text{GL}_{n-m}(F)$

$\text{GL}_m(F) = \langle \text{Diagonalmatrizen in } \text{GL}_m(F) \text{ und } x_{ij}(\alpha) \rangle$ , analog  $\text{GL}_{n-m}$

Es genügt also zu zeigen:  $X_{ij} \in H \forall 1 \leq i, j \leq m, i$  und  $m + 1 \leq i, j \leq n$

Sei  $X_1 = \langle He_1 \rangle = H$ -invarianter Unterraum von  $W_m \Rightarrow X_1 = W_m$

D.h.  $\exists h \in H, he_1 = \alpha e_1 + \dots + \alpha_m e_m$  mit  $\alpha_m \neq 0$ .

Sei  $w \in W$  mit  $h \in BWB$ . Wie oben folgt aus 2.1.9 und 2.1.5  $w(1) = m$  und daher  $X_{m1} \subseteq H$ .

Beachte:  $w \in H \Rightarrow w^{-1}(1) = j \leq m$

$X_{m1} = X_{w(1)w(j)} = wX_{1j}w^{-1} \in H$ .

Kommutatoren wie im ersten Spezialfall  $\Rightarrow X_{ij} \subseteq H \forall 1 \leq i, j \leq m \Rightarrow \text{GL}_m(F) \subseteq H$ .

$\langle Hem + 1 \rangle$  ebenfalls  $H$ -invariant  $\Rightarrow \exists h \in H : he_{m+1} = \alpha_{m+1}e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n$  mit  $\alpha_n \neq 0$ .

Es folgt analog wie eben  $X_{ij} \subseteq H \forall m + 1 \leq i, j \leq n \Rightarrow \text{GL}_{n-m}(F) \subseteq H$ .

$\Rightarrow P_\mu \subseteq H \Rightarrow H = P_\mu$

Übung: Allgemeiner Fall. □

# III. Die spezielle und projektive lineare Gruppen

Ziel:  $\text{PSL}_n(F)$  ist einfach, falls  $n > 2$  oder  $n = 2$  und  $F \neq \text{GF}(2)$  oder  $\text{GF}(3)$  ist.

2.3.1 Erinnerung:  $\det : \text{GL}_n(F) \rightarrow F^* : g \mapsto \det g$  ist Gruppenhomomorphismus mit Kern  $\text{SL}_n(F) \trianglelefteq G, \text{SL}_n(F) = \{g \in \text{GL}_n(F) \mid \det g = 1\}$ .

Klar:  $\det$  ist surjektiv

Isosätze:  $q - 1 = \frac{|\text{GL}_n(q)|}{|\text{SL}_n(q)|} \Rightarrow |\text{SL}_n(q)| = \prod_{k=1}^n \frac{q^k - q^{k-1}}{q-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{q^{k+1} - q^k = q^{\frac{n(n+1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^2 - 1)}{q-1}$

2.3.2 Satz:  $\text{SL}_n(F)$  wird von den Wurzeluntergruppen (d.h. von den Transvektionen) in  $G$  erzeugt.

Beweis: Für  $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ , und für  $\alpha \in F$  ist  $x_{ij}(\alpha) \in \text{SL}_n(F)$  nach 2.1.4.

In 2.1.5 haben wir gezeigt: Ist  $g = (\alpha_{ij}) \in \text{SL}_n(F) \subseteq G$ , so gibt es ein  $u \in U$  (Produkt von Transvektionen) so, dass gilt: Für  $1 \leq i \leq n$  gibt es eine eindeutig bestimmte Zeile  $k_i$  in  $ug$  so, dass der  $i$ -te Eintrag in dieser Zeile der erste von 0 verschiedene ist. Die Abbildung  $\pi : i \mapsto k_i$  ist Element von  $\sigma_n = W$ .

Wir können diese Zeilen nach 2.1.11 durch ein Produkt  $\tilde{\pi}$  von Transvektionen  $(i, \tilde{j}) = x_{ij}(1)x_{ji}(-1)x_{ij}(1)$  ( $(i, j) \in \sigma_n$  Transposition) bis aufs Vorzeichen ordnen. ( $(i, \tilde{j}) = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1, j)$ ). Daraus folgt: durch ein Produkt  $b \in \text{SL}_n(F)$  von Transvektionen wird  $b \cdot g$  eine obere Dreiecksmatrix  $\tilde{g}$ .

Also  $bg = \tilde{g} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & A \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Beachte:  $\det \tilde{g} = \det b \cdot \det g = 1$ , d.h.  $\tilde{g} \in \text{SL}_n(F)$ .  
 $\Rightarrow \det \tilde{g} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = 1$ .

Beachte: Seien  $\alpha, \beta, \gamma \in F$  mit  $\alpha\gamma \neq 0$ .

$$\begin{aligned} x_{21}(-1)x_{12}(1-\gamma^{-1})x_{21}(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-\gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-\gamma^{-1} \\ -1 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha\gamma & \gamma\beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \alpha\gamma - \alpha & \beta + \gamma\beta + \gamma - \beta - 1 \\ -\alpha + \alpha & -\beta + \beta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \gamma\beta - \beta - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auf alle Zeilen von  $\tilde{g}$  anwenden.

$\Rightarrow$  Man kann  $\tilde{g}$  durch Premultiplikation mit einem Produkt von Transvektionen auf die

$$\text{Gestalt } \tilde{g}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots \lambda_n & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in U \text{ bringen. Jedes Element von } U$$

ist aber Produkt von Transvektionen (elementare Zeilenoperationen:  $\tilde{g}' \rightsquigarrow 1$ ). Also ist  $\tilde{g}'$  Produkt von Transvektionen. Also ist  $g$  Produkt von Transvektionen.

2.3.3 Satz: Die Wurzeluntergruppen  $X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ , sind in  $\text{SL}_n(F)$  konjugiert.

Beweis: Seien  $1 \leq i, j \leq n, 1 \leq k, l \leq n, i \neq j, k \neq l$ .

$\sigma_n$  ist  $n$ -fach transitiv auf  $\{1, \dots, n\}$ , also zweifach transitiv  $\Rightarrow \exists w \in W = \sigma_n : w(i) = k, w(j) = l$ .

Haben gesehen:  $wX_{ij}w^{-1} = X_{w(i),w(j)} = X_{kl}$ . Ist  $w$  gerade Permutation, d.h.  $\text{sign } w = \det w = 1 \Rightarrow w \in \text{SL}_n(F)$  und wir sind fertig.

Sei also  $\text{sign } w = \det w = -1$  und  $\alpha \in F$ . Sei  $d = d^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(F)$ . Dann

ist  $\det(dw) = \det d \cdot \det w = -\det w = 1$ , d.h.  $dw \in \text{SL}_n(F)$ .

$$dwX_{ij}(dw)^{-1} = d(wX_{ij}w^{-1})d = dX_{kl}d = d(E + \alpha e_{kl})d = dEd + \alpha de_{kl}d = \begin{cases} X_{kl}(\alpha) & \text{für } k, l \neq 1 \\ X_{kl}(-\alpha) & \text{sonst, } (k \neq l) \end{cases}$$

In jedem Fall ist  $(dw)X_{ij}(dw)^{-1} = X_{kl}$ .

Definition: Sei  $Z = \{\alpha E \mid \alpha \in F^*\}, E = 1$ . Dann ist  $Z \leq G, G \subseteq Z(G) = \text{Zentrum von } G$ .

2.3.4 Satz:  $Z = Z(G)$  und  $Z \cap \text{SL}_n(F) = Z(\text{SL}_n(F))$ .

Es genügt zu zeigen: Jedes Element von  $\text{GL}_n(F)$  (bew.  $\text{SL}_n(F)$ ), das mit allen Transvektionen  $x_{ij}(1)$  ( $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ ) vertauscht, liegt schon in  $Z$ .

$$\text{Sei } g = (\alpha_{ij}) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij} \in Z(G) \Rightarrow g \cdot x_{rs}(1) = x_{rs}(1) \cdot g \forall 1 \leq r, s \leq n, r \neq s \Leftrightarrow g(E + e_{rs}) = (E + e_{rs})g \Leftrightarrow \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij} e_{rs} = \sum_{kl} \alpha_{kl} e_{rs} e_{kl} \Leftrightarrow \sigma_i \alpha_{ir} e_{is} = \sum_l \alpha_{sl} e_{rl}$$

d.h.  $e_{is} = e_{rl} \Leftrightarrow i = r, l = s, \alpha_{rr} = \alpha_{ss}, r \neq s, \alpha_{ij} = 0$  sonst.

$\Rightarrow g = \alpha \cdot E \in Z$ . (Für  $\text{SL}_n(F) : \alpha^n = \det \alpha E = 1$ )

Definition:  $\text{GL}_n(F)/Z = \text{PGL}_n(F) = \text{„projektive allgemeine lineare Gruppe“}$

$\text{SL}_n(F)/Z(\text{SL}_n(F)) = \text{PSL}_n(F) = \text{„projektive spezielle lineare Gruppe“}$

2. Isosatz:  $\text{PSL}_n(F) \cong \text{SL}_n(F)/(Z \cap \text{SL}_n(F)) = Z \cdot \text{SL}_n(F)/Z \leq \text{GL}_n(F)/Z = \text{PGL}_n(F)$

$$\text{Für } F = \text{GF}(q) = (F)_q : |\text{PGL}_n(q)| = \frac{|\text{GL}_n(q)|}{Z} = \frac{|\text{GL}_n(q)|}{q-1} = |\text{SL}_n(q)|$$

Bemerkung:



$$1) \text{ GL}_n(F) = \text{SL}_n(F) \rtimes \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in F^* \right\}$$

2)  $F$  algebraisch abgeschlossen  $\Rightarrow z := (\sqrt[n]{\det g}^{-1} E) \in Z, g \cdot z \in \text{SL}_n(F)$ , es folgt:  $\text{PSL}_n(F) \cong \text{PGL}_n(F)$ .

3)  $\text{PSL}_2(2) \cong \sigma_3 \supseteq A_3$ , da  $\text{PSL}_2(2) \cong \text{GL}_2(2)$   
 $\text{PSL}_2(3) \cong A_4 \supseteq V_4 \cong G_2 \times G_2$

2.3.6 Lemma: Sei  $n \geq 2$ ; und  $|F| \neq 2, 3$  für  $n = 2$ . Dann ist jede Tranvektion  $x_{ij}(\alpha)$  ( $1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \alpha \in F$ ) ein Kommutator von Elementen in  $\text{SL}_n(F)$ .

Beweis: Ist  $n > 2$ , dann ist  $x_{ij}(\alpha) = [x_{ij}(\alpha), x_{kj}(\alpha)]$  mit  $1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j$ .

Sei  $n = 2, \beta, \gamma \in F$  mit  $\beta \neq 0$ .

$$\left[ \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & (\beta^2 - 1)\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_{12}(\alpha)$  ist Kommutator dieser Elemente aus  $\text{SL}_2(F)$ , falls es  $\beta, \gamma \in F$  mit  $\beta \neq 0$  gibt, so dass  $\alpha = (\beta^2 - 1)\gamma$  ist.

Sei  $|F| > 3$ , dann gibt es immer ein  $\beta \in F^*$  mit  $\beta^2 \neq 1$  und  $\gamma = \alpha(\beta^2 - 1)^{-1}$ .

$x_{21}(\alpha)$  ähnlich bzw. ist konjugiert in  $\text{SL}_2(F)$  zu einem Element aus  $X_{12}$ .

2.3.7 Korollar: Sei  $n > 2$  oder  $|F| > 3$  für  $n = 2$ . Dann ist  $\text{SL}_n(F) = [\text{SL}_n(F), \text{SL}_n(F)]$ .

2.3.8 Lemma: Sei  $n \leq 2$   $\text{SL}_n(F)$  operiert auf der  $\{Fv \mid 0 \neq v \in F^n\}$  durch  $g(Fv) := F(gv)$  (Kern ist das Zentrum).

Diese Operation ist 2-fach transitiv.

Beweis: Seien  $c_1, c_2, d_1, d_2 \in F^n \setminus \{0\}$  und  $c_1, c_2$  bzw.  $d_1, d_2$  linear unabhängig, d.h.  $Fc_1 \neq Fc_2, Fd_1 \neq Fd_2$ .

Ergänze  $c_1, c_2$  bzw.  $d_1, d_2$  zu Basen  $\tilde{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  und  $\tilde{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  von  $F^n$ . Sei  $C = m_{\text{id}}(\xi, \tilde{C}) = m_f(\xi, \xi)$  mit  $f(e_i) = c_i$ .

$D = m_{\text{id}}(\xi, \tilde{D}) = m_g(\xi, \xi)$  mit  $g(e_i) = d_i$

Dann sind  $C, D \in \text{GL}_n(F)$ . Sei  $\epsilon = \det D / \det C = \det(DC^{-1}), A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}, \det A =$

$\epsilon, B = DA^{-1}C^{-1}$ , so ist  $Bc_1 = \epsilon^{-1}d_1, Bc_i = d_i$  für  $i > 2$  x

$BFc_i = FBC_i = Fd_i$  für alle  $i$ . Klar:  $\det B = 1$ , d.h.  $B \in \text{SL}_n(F)$  □.

Missing: 27.11.2009

$$|G| = p^a m, p \nmid m, |G|_p = p^a, |G|_{p'} = m$$

$\text{Syl}_p(G) \equiv 1 \pmod{p}$  Beweis:  $X = \{A \subseteq G \mid |A| = |G|_p = p^a\}$   $G$ -Menge

Bemerkung:  $P \in \text{Syl}_p(G) \Rightarrow P \in X$

$A \in X$  so gibt es ein  $g \in G : g \cdot A \ni 1$

$$|X| = \binom{p^a \cdot m}{p^a} = \sum_{O \in G\text{-Bahnen von } X} |O|$$

Sei  $A \in X, A \in O = \text{Orbit von } X$  so, dass  $1 \in A$ . Sei  $P = \text{Stab}_G(A) \leq G$ . Dann ist  $P \subseteq P \cdot A = A \Rightarrow |P| \leq |A| = p^a$

$$1.3.7 \Rightarrow |O| = |G : P|.$$

Angenommen  $p$  teilt nicht  $|G : P|$ , so ist  $|G|_p$  Teiler von  $|P|$ . Also ist  $|G|_p = |P| = p^a$  und  $P \in \text{Syl}_p(G)$  und  $|O| = m$ .

Sei umgekehrt  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Dann ist die  $G$ -Menge  $G/P = \cup g_i P$  mit  $|g_i P| = |P| = p^a$ , d.h.  $G/P$  ist ein Orbit  $O$  in  $X$ :  $|O| = |G : P| = m$

$$\text{Klar: } \text{Stab}_G(1 \cdot P) = P$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der  $G$ -Bahnen in  $X' := \{A \in X \mid p \nmid |G \cdot A|\}$

Also ist  $X' = \text{Vereinigung aller Bahnen } O \text{ von } X \text{ mit } p \nmid |O|$

$$X \setminus X' = \text{Vereinigung aller Bahnen } O \text{ von } X \text{ mit } p \mid |O| \text{ und daher } p \mid |X \setminus X'| = |X| - |X'|$$

$$\text{Also } |X| \equiv |X'| \pmod{p}$$

Sei  $r = |\text{Syl}_p(G)| = \text{Anzahl der } p\text{-Sylow Untergruppen von } G = |\{\text{Bahnen } O \text{ von } X \text{ mit } O \subseteq X'\}|$ .

$$\text{Es gilt dann: } r \cdot m = |X'| \equiv_p |X| \equiv_p \binom{p^a m}{p^a}$$

$p \nmid m \Rightarrow r \pmod{p}$  ist nur von  $|G|$  und nicht von  $G$  selbst abhängig. Das heißt je zwei Gruppen  $G$  und  $H$  mit  $|G| = |H|$  haben  $\pmod{p}$  dieselbe Anzahl von  $p$ -Sylowgruppen.

Sei  $G = C_{p^a m}$ , dann ist  $r \equiv 1 \pmod{p}$ , also ist  $|\text{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod{p}$  für alle  $G$  mit  $G = p^a m$ . Insbesondere ist  $r \neq 0$ , d.h.  $G$  besitzt mindestens eine  $p$ -Sylow Untergruppe.

Dies zeigt 1) und 4).

Sei nun  $P \in \text{Syl}_p(G), G$  Gruppe der Ordnung  $p^a m, p^a = |G|_p, Q \leq G$   $p$ -Gruppe.

$Y = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ .  $Q$  operiert auf  $Y$  durch Konjugation:

$${}^x(yPy^{-1}) = xyP(xy)^{-1} \in Y \text{ für } x \in X.$$

Sei  $O$  ein  $Q$ -Orbit von  $Y, P_1 \in O$ . Dann ist  $|O| = |Q : \text{Stab}_Q(P_1)| = \text{Potenz von } p \text{ (möglicherweise } p^0)$ .

Aber  $|Y| = |G : N_G(P)|$  Teiler von  $m$  (1.3.15)  $\Rightarrow p \nmid |Y|$ . Also muss es eine  $Q$ -Bahn  $O$  in  $Y$  geben mit  $p \nmid |O| \Rightarrow \exists Q$ -Bahn  $O$  in  $Y$  mit  $|O| = p^0 = 1 \Rightarrow O = \{P_1\}$ . Dann ist also  $xP_1x^{-1} = P_1 \forall x \in Q$ . Daher ist  $QP_1 = P_1Q$  und mit (1.1.4) ist  $QP_1 \leq G$

Klar ist:  $|P_1| \leq |QP_1|$ . Nach 1.3.12 ist  $|QP_1| = \frac{|Q||P_1|}{|Q \cap P_1|} = |P_1||Q : Q \cap P_1|$ . Also ist  $QP_1$  eine  $p$ -Untergruppe von  $G$ .

Also ist wegen  $|P_1| \leq |QP_1|$  die Ordnung  $|Q \cdot P_1|$  von  $QP_1$  gleich  $|P_1| = p^a$  und daher  $|Q \cap P_1| = |Q| \Rightarrow Q \subseteq P_1 \in \text{Syl}_p(G)$ . Dies zeigt 3).

Seien  $Q, P \in \text{Syl}_p(G) \Rightarrow$  (nach vorigem Schritt)  $\exists g \in G : Q \leq gPg^{-1}$ . Wegen  $|Q| = |P| = p^a$  ist  $Q = gPg^{-1}$ .  $\square$

2. Beweis für Existenz von  $p$ -Sylowuntergruppen:

Induktion über  $|G|$

$|G| = 1$  trivial

$p \nmid |G|$  trivial

$|G| = p^a m$  mit  $p \nmid m > 1$ , und sei die Behauptung beweisen für alle Gruppen  $|H|$  mit  $|H| < |G|$ .

Besitzt  $G$  eine echte Untergruppe  $H$  mit  $p \nmid [G : H]$ , so ist jede  $p$ -Sylowgruppe von  $H$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$  und wir sind fertig.

Ohne Einschränkung gelte  $H \leq G \Rightarrow p \mid [G : H]$

Klassengleichung 1.3.13:

$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^l [G : C_G(g_i)]$  mit  $\{g_1, \dots, g_l\}$  Repräsentanten von Konjugationsklassen von  $G$  der Größe  $> 1$ .

Für  $1 \leq i \leq l$  ist  $C_G(g_i) \leq G$  und daher  $p \mid [G : C_G(g_i)]$

Also teilt  $p \mid |Z(G)|$  = abelsche Gruppe. Also ist  $|Z(G)| > 1$ .

$\Rightarrow G$  besitzt eine normale Untergruppe  $N (\leq Z(G))$  der Ordnung  $p$ .  $|G/N| = p^{a-1}m < p^a m \Rightarrow \exists \bar{P} \in \text{Syl}_p(G/N)$

Sei  $P =$  volles Urbild von  $\bar{P}$  in  $G \Rightarrow N \trianglelefteq P, P/N = \bar{P} \Rightarrow |P| = p^a \Rightarrow P \in \text{Syl}_p(G)$ .

Korollar: Sei  $|G| = p^a m, p^a = |G|_p$ . Dann gibt es für  $1 \leq b \leq a$  eine Untergruppe  $H$  von  $G$  mit  $|H| = p^b$  (Weil  $P \in \text{Syl}_p(G)$  eine  $p$ -Gruppe, daher nilpotent und damit auflösbar ist. Wir können  $H \leq P$  wählen!).

3.1.3 Korollar:  $|\text{Syl}_p(G)|$  ist Teiler von  $|G|_{p'} = \frac{|G|}{|G|_p}$  ( $|G| = p^a m, p \nmid m$ )

Beweis:  $G$  operiert auf  $\text{Syl}_p(G)$  per Konjugation transitiv. Also ist  $P \in \text{Syl}_p(G)$ , so ist  $|\text{Syl}_p(G)| = [G : \text{Stab}_G(P)]$ . Wegen  $P \trianglelefteq N_G(P) \leq G$  ist daher  $|\text{Syl}_p(G)|$  Teiler von  $m$ .

3.1.4 Korollar: (Cauchy's Theorem)  $G$  hat ein Element der Ordnung  $p$  ( $p \mid |G|$ )

3.1.5 Satz: Sei  $N \trianglelefteq G (N \neq G)$ , und sei  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Dann ist  $PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$  und  $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$ .

Beweis:  $[G/N : PN/N] = [G : PN]$  wegen 3. Isosatz.  $PN/N \cong P/(P \cap N) \Rightarrow PN/N$  ist Gruppe.

$p \nmid [G : P] = |G|_{p'} \Rightarrow [G : PN]$  ist Teiler von  $m$ , wird nicht von  $p$  geteilt.

$\Rightarrow PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$ .

Nach 1.3.12 ist  $[PN : P] = \frac{|P| \cdot |N|}{|P \cap N| \cdot |P|} = \frac{|N|}{|P \cap N|} \Rightarrow$  (nach oben)  $P \cap N$  ist  $p$ -Untergruppe von  $N$  mit  $[N : P \cap N]$  wird nicht von  $p$  geteilt. Also ist  $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$ .  $\square$

Vorsicht:  $H \leq G \not\Rightarrow H \cap P \in \text{Syl}_p(H)$  für  $P \in \text{Syl}_p(G)$

3.1.6 Satz: Sei  $H \leq G, P \in \text{Syl}_p(G)$ . Dann gibt es  $g \in G$  so, dass  $gPg^{-1} \cap H \in \text{Syl}_p(H)$  ist.

Beweis: Sei  $Q \in \text{Syl}_p(H) \Rightarrow \exists P' \in \text{Syl}_p(G)$  mit  $Q \subseteq P' \Rightarrow \exists g \in G$  mit  $P' = gPg^{-1} \cap H \supseteq Q$

Klar:  $Q = P' \cap H$  (warum?)

Anwendungen:

3.1.7 Satz („ $pq$ -Theorem“): Seien  $p, q$  Primzahlen mit  $p > q$ . Sei  $G$  Gruppe mit  $|G| = p \cdot q$ . Dann ist  $G$  abelsch (und daher  $\cong C_{q \cdot p} \cong C_q \times C_p$ ) oder  $p \equiv 1 \pmod q$ . Ist dies so, dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung  $p \cdot q$ .

Beweis: Sei  $P \in \text{Syl}_p(G), Q \in \text{Syl}_q(G) \Rightarrow |P| = p, |Q| = q \Rightarrow P \cong C_p \wedge Q \cong C_q$ . Wir haben  $P \cap Q = (1)$ , und daher ist  $G = P \cdot Q$  (1.3.12). Mit 3.1.3 folgt  $|\text{Syl}_p(G)| \mid [G : P]$  und mit 3.1.4  $|\text{Syl}_p(G)| \cong 1 \pmod p$   
 $\Rightarrow |\text{Syl}_p(G)| = 1 = [G : N_G(P)] \Rightarrow N_G(P) = G \Rightarrow P \trianglelefteq G$  ( $p > q \Rightarrow q \not\equiv 1 \pmod p$ ).

Ist  $p \not\equiv 1 \pmod q \Rightarrow$  (analog)  $Q \trianglelefteq G \Rightarrow G = P \times Q$

Sei also  $p \equiv 1 \pmod q$ . Sei  $G$  nicht abelsch,  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(P) : x \mapsto c_x, c_x : P \rightarrow P : y \mapsto xyx^{-1}$ .

$\ker \varphi \neq (1) \Rightarrow \ker \varphi = Q \Rightarrow \varphi Q \Rightarrow (1) \leq P$  und  $c_x = \text{id}_P \Rightarrow G = P \times Q$ ,  $G$  abelsch. Widerspruch!

Also ist  $\ker \varphi = (1)$ , d.h.  $\varphi$  ist injektiv. Sei  $P = \langle g \rangle$ . Leicht: Sei  $1 \leq i \leq p-1$ , so induziert  $g \mapsto g^i$  einen Automorphismus  $\sigma_i$  von  $P = C_p = \langle g \rangle$ , und  $\text{Aut}(P) = \{\sigma_i \mid 1 \leq i \leq p-1\}$  ist zyklisch der Ordnung  $p-1$ .

Nun ist  $q \mid p-1$ , also hat  $C_{p-1} \cong \text{Aut}(C_p)$  eine eindeutige Untergruppe der Ordnung  $q$ , und diese ist isomorph zu  $C_q \cong Q$ .

Also: Unter  $\varphi$  wird  $Q$  auf die eindeutig bestimmte Untergruppe der Ordnung  $q$  von  $\text{Aut}(P)$  abgebildet.

Beachte: Ist  $\psi : Q \rightarrow \text{Aut}(P)$  ein Monomorphismus, so ist  $\text{im } \varphi = \text{im } \psi$ , es gibt aber viele Monomorphismen von  $Q \rightarrow \text{Aut}(P)$ .

Für jeden solchen Monomorphismus  $\psi$  haben wir eine Gruppe  $P \rtimes_{\psi} Q$ .

Der nächste Satz zeigt: Alle diesen semidirekten Produkte sind isomorph. Also gibt es in diesem Fall ( $p \equiv 1 \pmod q$ ) genau eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung  $p \cdot q$ .  $\square$

3.1.8 Satz: Sei  $H$  zyklische Gruppe,  $N$  Gruppe. Seien  $\varphi, \psi$  Monomorphismen von  $H \rightarrow \text{Aut}(N)$  mit  $\text{im } \varphi = \text{im } \psi$ . Dann ist  $N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\psi} H$ .

Beweis: Sei  $H = \langle x \rangle$ . Wegen  $\varphi(H) = \psi(H)$  ist  $\langle \varphi(x) \rangle = \langle \psi(x) \rangle \leq \text{Aut}(N)$ . Es gibt also  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $\varphi(x)^a = \psi(x)$  und  $\psi(x)^b = \varphi(x)$ . Für  $s \in \mathbb{Z}$  ist dann  $\varphi((x^s)^a) = \varphi(x)^{as} = \psi(x)^s = \psi(x^s)$ , d.h.  $\varphi(h^a) = \psi(h) \forall h \in H$ , analog  $\psi(h^b) = \varphi(h) \forall h \in H$ .

Definiere  $\tau : N \rtimes_{\psi} H \rightarrow N \rtimes_{\varphi} H$  durch  $\tau(n \cdot h) = n \cdot h^a$  und  $\lambda : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow N \rtimes_{\psi} H$  durch  $\lambda(n \cdot h) = n \cdot h^b$

$$\tau(n_1 h_1 n_2 h_2) = \tau(n_1 \psi(h_1)(n_2) h_1 h_2) = n_1 \psi(h_1)(n_2)(h_1 h_2)^a = n_1 \varphi(h_1^a)(n_2) h_1^a h_2^a = n_1 h_1^a n_2 h_2^a = \tau(n_1 h_1) \tau(n_2 h_2)$$

$\Rightarrow \tau$  (und analog  $\lambda$ ) ist Gruppenhomomorphismus.

Nun ist  $\tau \lambda : nh \mapsto \tau(n \cdot h^b) = n \cdot h^{ba}$ , aber  $\varphi(x) = \psi(x)^b = (\varphi(x^a))^b = \varphi(x^{ab})$  und  $\varphi$  ist injektiv. Also ist  $x = x^{ab}$  und daher  $h = h^{ab} \forall h \in H$ , also ist  $\tau \lambda = \text{id}_{N \rtimes_{\varphi} H}$ ,  $\lambda \tau = \text{id}_{N \rtimes_{\psi} H}$

Also sind  $\tau, \lambda$  Isomorphismen und  $N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\psi} H$ ,  $\square$ .

Erinnerung:  $A_5$  ist einfach  $A_5 \leq \sigma_5$ ,  $|\sigma_5| = 5! = 120 \Rightarrow A_5 = 60 = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$ .

3.1.9 Satz: Sei  $G$  einfach,  $|G| = 60$ . Dann ist  $G \cong A_5$ .

Beweis: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $H \leq G$  mit  $[G : H] = n$ . Sei  $\rho : G \rightarrow \sigma_n$  die Darstellung, die zu der  $G$ -Menge  $G/H$  gehört.  $\Rightarrow \rho$  ist injektiv. Insbesondere ist  $|G| = 60 \leq n! \Rightarrow n \geq 5$ .

Beh:  $G$  besitzt eine Untergruppe von  $H$  mit  $[G : H] = 5$ .

Angenommen,  $G$  besitzt keine solche Untergruppe:  $|\text{Syl}_2(G)| \neq 1$  teilt  $3 \cdot 5 = 15$ , sonst wäre  $G$  nicht einfach. Sei  $P \in \text{Syl}_2(G)$ . Betrachte Möglichkeiten für  $|\text{Syl}_2(G)|$ :

3:  $[G : N_G(P)] = 3 < 5$  Widerspruch!

5:  $[G : N_G(P)] = 5$  Widerspruch zur Annahme

Also ist  $[G : N_G(P)] = 15$  Seien  $S_1, S_2 \in \text{Syl}_2(G)$ ,  $S_1 \neq S_2$ . Sei  $1 \neq t \in S_1 \cap S_2$ .  $V_4 = C_2 \times C_2, C_4$  sind die einzigen Gruppen der Ordnung 4.  $\Rightarrow S_1$  und  $S_2$  sind abelsch  $\Rightarrow |C_G(t)| > 4$  und  $4 \mid |C_G(t)|$ , da  $S_1 \leq C_G(t)$ .  $\Rightarrow [G : C_G(t)] \in \{1, 3, 5\} \Rightarrow [C : C_G(t)] = 1 \Rightarrow t \in Z(G) \trianglelefteq G$  Widerspruch zur Einfachheit von  $G$ .

Also hat  $G : 15(4 - 1) = 45$  der Ordnung 2 oder 4. Da  $G$  einfach ist, gilt für  $P \in \text{Syl}_5(G) : 1 \neq [G : N_G(P)] \mid 4 \cdot 3$  und  $[G : N_G(P)] \equiv 1 \pmod{5}$ , also nicht  $\{1, 2, 3, 4, 12\}$  - also hat  $G$  genau 6 5-Sylowgruppen, und daher  $6(5 - 1) = 24$  Elemente der Ordnung 5. Also ist  $|G| \leq 45 + 24 > 60$  Widerspruch. Also hat  $G$  eine Untergruppe  $H$  mit  $[G : H] = 5$ .

Sei wieder  $\varphi : G \rightarrow \sigma_5$  die Darstellung auf  $G/H$ . Diese ist injektiv, so ist  $G$  ohne Einschränkung Untergruppe von  $\sigma_5$  vom Index 2, da die  $|G| = 60 = \frac{120}{2} = \frac{|\sigma_5|}{2}$ . Also ist  $G \trianglelefteq \sigma_5$ .

Angenommen  $G \neq A_5 \Rightarrow |G \cdot A_5| > 60 \Rightarrow G \cdot A_5 = \sigma_5$ .

Nach 1.3.12:  $|G \cap A_5| = \frac{|G||A_5|}{|G \cdot A_5|} = 30$ . Also ist  $G \cap A_5$  Untergruppe von  $G$  vom Index 2 - Widerspruch. Also  $G = A_5$ .

3.1.10 Korollar:  $\text{PSL}_2(4) \cong \text{PSL}_2(5) \cong A_5$ , da  $\text{PSL}_2(4)$  und  $\text{PSL}_2(5)$  einfach mit Ordnung 60.

Bemerkung: Man kann zeigen: Alle anderen Gruppen  $\text{PSL}_n(q)$  sind paarweise verschieden (?).

Relativ leichte Übung: Ist  $G$  einfach und  $|G| < 60$  so folgt  $G \cong C_{|G|}$

3.1.11 Satz „Frattini Argument“: Sei  $G$  endliche Gruppe,  $N \trianglelefteq G$  und  $P \in \text{Syl}_p(N)$ ,  $p$  Primzahl. Dann ist  $G = N_G(P) \cdot N$ .

Beweis: Sei  $g \in G$ . Wegen  $gNg^{-1} = N \trianglelefteq G$  ist  $gPg^{-1} \subseteq N \Rightarrow gPg^{-1} \in \text{Syl}_p(N)$ . Also gibt es  $n \in N : n(gPg^{-1})n^{-1} = P = ngP(ng)^{-1} \Rightarrow ng \in N_G(P) \Rightarrow g \in n^{-1}N_G(P) \subseteq NN_G(P) = N_G(P)N$ .  $\square$

# IV. Normalteilerstruktur

## 1. Satz von Jordan-Hölder

Sei im folgenden  $G$  eine beliebige Gruppe.

4.1.1 Definition: Sei  $\Omega$  eine Menge, dann heißt  $G$  Gruppe mit Operatorenbereich  $\Omega$  (kurz  $\Omega$ -Gruppe), falls es eine externe binäre Verknüpfung  $\Omega \times G \rightarrow G : (\alpha, g) \mapsto \alpha g \in G$  gibt mit  $\alpha(g_1 g_2) = (\alpha g_1)(\alpha g_2) \forall g_1, g_2 \in G, \alpha \in \Omega$ .

Äquivalente Formulierung: Es gibt eine Abbildung von  $\Omega \rightarrow \{\sigma : G \rightarrow G \mid \sigma \text{ ist Gruppenhom.}\}$ .

Eine Untergruppe  $H$  der  $\Omega$ -Gruppe  $G$  heißt zulässig ( $\Omega$ -Untergruppe,  $H \leq_{\Omega} G$ ), falls  $\alpha h \in H \forall h \in H, \alpha \in \Omega$ , und sie heißt zulässiger Normalteiler ( $\Omega$ -Normalteiler,  $H \trianglelefteq_{\Omega} G$ ), wenn  $H$  zusätzlich Normalteiler von  $G$  ist.

Klar: Homomorphismen von  $\Omega$ -Gruppen:  $F : G \rightarrow X$  Gruppenhomomorphismus mit  $f(\alpha g) = \alpha f(g)$ ,  $G, X$   $\Omega$ -Gruppen,  $g \in G, \alpha \in \Omega$

Es gelten Isosätze, Kerne von  $\Omega$ -Homomorphismen sind  $\Omega$ -Normalteiler, Bilder sind  $\Omega$ -Untergruppen.

Eine  $\Omega$ -Gruppe heißt einfach, falls sie keine nichttrivialen  $\Omega$ -Normalteiler hat.

4.1.2 Beispiele:  $G : \Omega$ -Gruppe

- i)  $\Omega = \emptyset$ : zulässigen Untergruppen = Untergruppe von  $G$ , zulässigen Normalteiler = Normalteiler von  $G$ .
- ii)  $\Omega = \text{Inn}(G)$  ( $\Omega = G$  operiert durch Konjugation auf  $G$ ): zulässigen Untergruppen = zulässigen Normalteiler = Normalteiler von  $G$ .
- iii)  $\Omega = \text{Aut}(G)$ : zulässigen Untergruppen = char. Untergruppen von  $G$ .
- iv)  $G = (R, +)$  = add. Gruppe eines Rings  $R$  mit 1 (alle Untergruppen sind Normalteiler)  
 $\Omega = R$  operiert auf  $G$  per Multiplikation von links (rechts). Die  $\Omega$ -Untergruppen von  $(R, +)$  sind genau die Links Ideale (Rechtsideale) von  $R$ . Links-Rechts-Operation:  $\Omega \times G \times \Omega \rightarrow G : (\alpha, g, \beta) \mapsto \alpha g \beta$  mit  $(\alpha g) \beta = \alpha (g \beta)$ .

Für  $(R, +)$  mit  $\Omega = R$  sind dann die zulässigen Untergruppen die Ideale von  $R$ .

v)  $M = G =$  additive abelsche Gruppe mit  $R$ -Modul,  $R = \text{Ring} \ni 1$ ,  $M$  ist eine  $R$ -Gruppe unter Linksmultiplikation mit Elementen von  $R$ .

Die zulässigen  $R$ -Untergruppen = zulässige  $R$ -Normalteiler = Untermoduln (analog für Rechtsmoduln).

Jetzt sei  $\Omega$  eine Menge und  $G$  eine  $\Omega$ -Gruppe.

Definition: Eine endliche Folge  $G = G_0 >_{\Omega} G_1 >_{\Omega} G_2 >_{\Omega} \dots >_{\Omega} G_r = (1)$  von  $\Omega$ -Untergruppen heißt Kompositionsreihe von  $G$ , falls  $G_{i+1} \trianglelefteq_{\Omega} G_i$  und  $G_i/G_{i+1}$  ist einfache  $\Omega$ -Gruppe.

Beispiel:  $\sigma_5 \supseteq A_5 \supseteq (1)$  ist eine Kompositionsreihe mit „Kompositionsfaktoren“  $\sigma_5/A_5 \cong C_2, A_5 = A_5/(1)$ .

Definition:  $N$  ist maximale normale  $\Omega$ -Untergruppe von  $G$ , falls  $G \neq N \trianglelefteq_{\Omega} G$  und kein  $\Omega$ -Normalteiler von  $G$  echt zwischen  $N$  und  $G$  existiert  $\Rightarrow G/N$  einfache  $\Omega$ -Gruppe.

Beachte: Für  $\Omega$ -Gruppen gelten die 3 Isomorphiesätze, und daher der Korrespondenzsatz 1.1.11.

4.1.3 Satz: Endliche Gruppen ( $\Omega = \emptyset$ ) besitzen Kompositionsreihen. Beweis klar.

4.1.4 Korollar: Sei  $G$  endliche Gruppe ( $\Omega = \emptyset$ ), und sei  $N \trianglelefteq G$ . Dann besitzt  $G$  eine Kompositionsreihe „durch“  $N$ , d.h.  $N$  kommt als eine der Untergruppen  $G_i$  vor.

Beweis: Sei  $N = N_0 > N_1 > N_2 > \dots > N_k = (1)$  Kompositionsreihe von  $N$  und  $G/N = H_0 > H_1 > \dots > H_r = (1)$  Kompositionsreihe von  $G/N$ ,  $G_i =$  volles Urbild von  $H_i$  in  $G/N$ , also  $G_i = \{g \in G \mid gN \in H_i\}$ .

1.1.11  $\Rightarrow G = G_0 > G_1 > \dots > G_{r-1} > N = N_0 > \dots > N_k = (1)$  Kompositionsreihe von  $G$  durch  $N$ .

4.1.5 Lemma: Sei  $G$  beliebige  $\Omega$ -Gruppe mit einer Kompositionsreihe. Sei  $N \trianglelefteq_{\Omega} G$ , dann besitzt  $N$  ebenfalls eine Kompositionsreihe.

Beweis: Sei  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = (1)$  Kompositionsreihe von  $G$ . Sei  $N_i = N \cap G_i$ . Dann ist  $N = N_0 \geq N_1 \geq \dots \geq N_r = (1)$

Dann ist  $N_{i+1} = G_{i+1} \cap N \trianglelefteq N_i = G_i \cap N$  und  $N_i/N_{i+1} = (N \cap G_i)/(N \cap G_{i+1}) = (N \cap G_i)/((N \cap G_i) \cap (G_{i+1})) \cong (2. \text{ Isosatz}) ((N \cap G_i)G_{i+1})/G_{i+1} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$  (Korrespondenzsatz) Also ist, da  $G_i/G_{i+1}$  einfach ist, entweder  $N_i/N_{i+1} = (1)$  (d.h.  $N_i = N_{i+1}$ ), oder  $N_i/N_{i+1} \cong G_i/G_{i+1}$  einfach.

So erhalten wir eine Kompositionsreihe von  $N$  durch Streichung der Wiederholungen in  $N = N_0 \geq N_1 \geq \dots \geq N_r = (1)$ . □

Definition: Eine Kette  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = (1)$  heißt  $\Omega$ -Subnormalkette, falls  $G_{i+1} \trianglelefteq_{\Omega} G$  ist, und  $\Omega$ -Normalkette, falls  $G_i \trianglelefteq_{\Omega} G$  ist.

Seien  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = (1)$  und  $G = H_0 > H_1 > \dots > H_r = (1)$  zwei Subnormalketten derselben Länge  $r$ . Dann heißen diese äquivalent, falls es ein  $\rho \in \sigma_r$  gibt mit  $G_{i-1}/G_i \cong H_{\rho(i)-1}/H_{\rho(i)}$  für  $1 \leq i \leq r$ .

Klar: Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Subnormalketten der Länge  $r$  von  $G$ .

4.1.6 Satz (Jordan-Hölder): Sei  $G$  eine  $\Omega$ -Gruppe und besitze  $G$  eine Kompositionsreihe. Dann haben je zwei Kompositionsreihen von  $G$  dieselbe Länge und sind äquivalent.

Konsequenz: In einer Kompositionsreihe einer  $\Omega$ -Gruppe (= einfache  $\Omega$ -Gruppen), sind die vorkommenden einfachen Kompositionsfaktoren mit ihren Multiplizitäten eindeutig bestimmt (aber nicht die Reihenfolge).

Beweis: Seien  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = (1)$  und  $G = H_0 > H_1 > \dots > H_s = (1)$  zwei Kompositionsreihen von  $G$ .

Induktion über  $r$ :

$r = 0$ :  $G = (1)$  trivial.

$r = 1$ :  $G \trianglerighteq (1)$  ist Kompositionsreihe  $\Rightarrow G$  ist einfach  $\Rightarrow s = s, H_1 = (1)$ .

Sei  $r > 1$  und die Behauptung bewiesen für alle  $\Omega$ -Gruppen mit einer Kompositionsreihe der Länge  $< r$ .

Ist  $G_1 = H_1$ , so hat  $G_1 = H_1$  die Kompositionsreihe  $G_1 > G_2 > \dots > G_r = (1)$  der Länge  $r - 1$  und  $H_1 > H_2 > \dots > H_s = (1)$ , die nach Induktionsvoraussetzung äquivalent sind und  $r - 1 = s - 1$ , also  $r = s$  und mit  $G/G_1 = H/H_1$  fertig.

Sei also  $G_1 \neq H_1$ . Wegen  $G_1 \trianglelefteq G_0 = G, H_1 \trianglelefteq H_0 = G$  ist  $G_1 \trianglelefteq G_1 H_1 \trianglelefteq G$ . Da  $G/G_1$  einfach ist, ist also  $G_1 H_1 = G$ .

Sei  $K = G_1 \cap H_1$ , dann ist  $G/G_1 \cong H_1/K$  und  $G/H_1 \cong G_1/K$ .

Also sind  $G_1/K$  und  $H_1/K$  einfache  $\Omega$ -Gruppen.

Beachte  $K \trianglelefteq G$ , also besitzt  $K$  eine Kompositionsreihe  $K = K_0 > K_1 > \dots > K_t = (1)$ .

$G_1 > K_0 > K_1 > \dots > K_t = (1)$  ist Kompositionsreihe von  $G$  der Länge  $t + 1$ , die nach Induktionsvoraussetzung äquivalent zu  $G_1 > G_2 > \dots > G_r$  ist, und  $t + 1 = r - 1$ , analog  $t + 1 = s - 1$ , also  $r = s$ .

Wegen  $G/G_1 \cong H_1/K$  und  $G/H_1 \cong G_1/K$  sind die ursprünglichen Kompositionsreihen äquivalent.

4.1.7 Beispiele:

i)  $\Omega = \emptyset$ , Kompositionsreihen sind Subnormalketten  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = (1)$  mit  $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$  und  $G_i/G_{i+1}$  einfache Gruppe.

ii)  $M$  ist  $R$ -Module,  $R = K$ -Algebra,  $\dim_K(M) < \infty \Rightarrow M$  hat Kompositionsreihe.

iii)  $G$  ist  $\Omega$ -Gruppe mit  $\Omega = \text{Inn}(G), G = G_0 > \dots > G_r = (1)$  mit  $G_i \trianglelefteq G$  und  $G_i/G_{i+1}$



einfache Gruppe („Normalreihe“, Hauptreihe mit Hauptfaktoren  $G_i/G_{i+1}$ )

iv)  $R = \text{Ring} \ni 1, G = (R, +), \Omega = R$  operiert durch Linksmultiplikation. Kompositionsreihe:  $R = R_0 > \dots > R_r = (0)$ ,  $R_i$  Linksideale von  $R_1$ ,  $R_i/R_{i+1}$  einfacher  $R$ -Modul.

v)  $R = \text{Ring} \ni 1, M =$  abelsche Gruppe,  $R$ -Linksmodul.  $M = M_0 > \dots > M_r = (0)$  mit  $M_i/M_{i+1}$  irreduzibler  $R$ -Modul.

Beachte: Ist  $G = G_0 > G_1 > \dots > G_r$  eine Hauptreihe für  $G$ , so ist  $G_i/G_{i+1}$  minimaler Normalteiler von  $G/G_{i+1}$  (Korrespondenzsatz)

4.1.8 Satz: Ein minimaler Normalteiler einer endlichen Gruppe  $G$  ist direktes Produkt von Kopien einer einzigen einfachen Gruppe.

Beweisidee: Sei  $(1) \neq N \trianglelefteq G, N \neq G$  minimaler Normalteiler von  $G$ . Ist  $N$  einfach, so sind wir fertig.

Sei  $N$  nicht einfach und sei  $(1) \neq N_1$  maximaler echter Normalteiler von  $N$ . Seien  $N_1, \dots, N_k$  die verschiedenen  $G$ -konjugierten von  $N_1$  ( $N_i = g_i N g_i^{-1}$  für ein  $g_i \in G$ ). Nun ist  $g_i N_1 g_i^{-1} \subseteq g_i N g_i^{-1} = N \Rightarrow N_1, \dots, N_k \leq N$ . Es gilt also  $N_i \trianglelefteq N$

Man kann zeigen, dass alle  $N/N_i$  isomorph und einfach und  $N \cong$  direktes Produkt eines Teils der  $N/N_i$ . (Details Übung)

4.1.9 Satz: Endliche Gruppen besitzen eine Hauptreihe (Kompositionsreihe mit  $\Omega = \text{Inn}(G)$ ). Jeder Hauptfaktor ist minimale normale Untergruppe einer Faktorgruppe von  $G$  und daher direktes Produkt von Kopien einer einfachen Gruppe.

Beweis: Sei  $G$  endliche Gruppe. Induktion über  $|G|$ .  $|G| = 1$  trivial.

Ist  $(1) \neq G$  und  $G$  einfach, so ist  $G > (1)$  eine Hauptreihe.

Sei also  $G$  nicht einfach und  $N \neq (1)$  minimaler Normalteiler von  $G$ . Nach Induktion besitzt  $G/N$  eine Hauptreihe  $G/N = G_0/N > G_1/N > \dots > G_r/N = (1)$  mit  $G_i =$  volles Urbild von  $(G/N)_i$  in  $G \Rightarrow G = G_0 > G_1 > \dots > G_r = N > G_{r+1} = (1)$  ist Hauptreihe für  $G$ .  $\square$

Übung: Sei  $G$  Gruppe. Hat  $G$  eine Kompositionsreihe ( $\Omega = \emptyset$ ), so auch eine Hauptreihe ( $\Omega = \text{Inn}(G)$ ).

# V. Lineare Darstellung

## 1. Grundlagen

### a). Gruppenalgebren

Alle Ringe haben Einselement  $1 = 1_R$ , aber sind nicht notwendigerweise kommutativ.

Bekannt: Unterring, Rechts-/Linksideale (Reid, Liid), Ideale, Ringhomomorphismen, ker, im, Faktorringe, Isosätze ...

$K$  = Körper: Selbe Liste für  $K$ -Algebren.

Allgemein:  $\Lambda$  = kommutativer Ring  $\ni 1$ , Eine  $\Lambda$ -Algebra ist ein Ring  $R$  mit Einselement zusammen mit einem einserhaltenden Ringhomomorphismus  $f$  von  $\Lambda \rightarrow Z(R) = \{r \in R \mid rs = sr \forall s \in R\}$ ,  $Z(R)$  ist immer ein Unterring von  $R$ ,  $1_R \in Z(R)$ , so dass gilt:

(Wir schreiben  $\lambda r$  statt  $f(\lambda)r$  für  $\lambda \in \Lambda, r \in R$ )

$\lambda r = r\lambda \forall r \in R$  ( $f$  nicht notwendigerweise injektiv)

Beachte:  $\bar{f} : \Lambda / \ker f \rightarrow Z(R)$  ist injektiv, d.h.  $R$  ist  $\bar{\Lambda}$ -Algebra mit  $\bar{\Lambda} = \Lambda / \ker f$

Beachte:

- i) Jeder Ring ist  $\mathbb{Z}$ -Algebra durch  $z \mapsto z \cdot 1_R$ .
- ii) Unterringe einer  $\Lambda$ -Algebra sind nicht notwendigerweise Uneralgebren, aber Rechtsideale und Linksideale sind es. Nicht jeder Ringhomomorphismus zwischen  $\Lambda$ -Algebren ist Algebra Homomorphismus (auch  $\Lambda$ -linear).

Beispiele:

- i)  $K^{n \times n}, \text{End}_K(V), V = K$ -Vektorraum
- ii) Auf  $R = \mathbb{C}^2$  definieren wir eine Multiplikation durch  $(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$   
Übung:  $R$  ist 2-dimensionale kommutative  $\mathbb{C}$ -Algebra.  $\mathbb{C}$ -Basis:  $\{e := (1, 0), a := (0, 1)\}$

$$e \cdot e = (1, 0)(1, 0) = (1, 0) = e, a \cdot e = e \cdot a = (0, 1) = a, a \cdot a = (1, 0) = e$$

$$(\{e, a\}, \cdot) = C_2$$

5.1.1 Definition:  $\Lambda =$  kommutativer Ring  $\ni 1$ ,  $A = \Lambda$ -Algebra, so dass gilt:

- i) Als  $\Lambda$ -Modul ist  $A$  frei mit einer Basis  $\mathcal{B}$  so dass gilt:
- ii)  $(\mathcal{B}, \cdot) \cong G =$  Gruppe
- iii) Dann heißt  $A$  Gruppenalgebra über  $\Lambda$  der Gruppe  $G$  und wird mit  $\Lambda G$  bezeichnet.

Fragen:

- i)  $G$  Gruppe,  $\Lambda =$  kommutativer Ring  $\ni 1$   
Gibt es eine Gruppenalgebra  $\Lambda G$ ?
- ii) Gibt es genau eine Gruppenalgebra  $\Lambda G$  Ja (trivial)
- iii) Bestimmt die Gruppenalgebra die Gruppe  $G$ , d.h. ist  $\Lambda G \cong \Lambda H \Rightarrow G \cong H$ ? Nein!  
 $|G| < \infty$ . Klar  $|G| = |H|$ .  
 $\Lambda = \mathbb{C}$ : Viele Gegenbeispiele:  $\mathbb{C}D_8 \cong \mathbb{C}Q_8, \dots$   
 $\Lambda = \mathbb{Z}$  (Highman,  $\sim 1930$ ) Vermutung:  $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H \Rightarrow G \cong H$ ? Nein, Gegenbeispiel:  
 $|G| = |H| = 2^{21} \cdot 97^28$  (?) (Hertweck)  
 Es gibt kleinere! (aber nicht sehr viel kleinere)

5.1.3 Konstruktion von  $\Lambda G$ : Die Gruppenalgebra  $\Lambda G$  ist als  $\Lambda$ -Modul der freie  $\Lambda$ -Modul über der Menge  $G$ , d.h.  $\Lambda G = \left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in \Lambda, \text{ fast alle } \alpha_g = 0 \right\}$

$$\left( \sum \lambda_g g \right) + \left( \sum \mu_g g \right) = \sum (V + \mu_g) g$$

$$\beta \left( \sum \lambda_g g \right) = \sum (\beta \lambda_g) g$$

$$\left( \sum \alpha_g g \right) \left( \sum \beta_h h \right) = \sum_{g,h} \alpha_g \beta_h (g \cdot h) = \sum_x \left( \sum_{gh=x} \alpha_g \beta_h \right) x = \sum_x \left( \sum_g \alpha_g \beta_{g^{-1}x} \right) x$$

5.1.4 Satz: Seien  $\Lambda, G, \Lambda G$  wie oben beschrieben. Dann  $\Lambda G$  assoziative  $\Lambda$ -Algebra mit Einselement  $1_{\Lambda G} = \sum \alpha_g g$  mit  $\alpha_g = 1$  für  $g = 1$  und sonst 0. ( $\alpha_g = 1_G$ ). Durch  $g \mapsto \sum_h a_h h$  mit  $a_h = 1$  für  $h = g$  und 0 sonst wird  $G$  in  $\Lambda G$  eingebettet und bildet eine  $\Lambda$ -Basis von  $\Lambda G$ .  
Beweis: Trivial.

Andere Notation:  $\sum \alpha_g g \mapsto$  Abbildung  $G \rightarrow K : g \mapsto \alpha_g \in \Lambda$  mit  $\alpha_g = 0$  für fast alle  $g$ .

$$\Lambda G = \left\{ f \text{ in } \Lambda^G \mid f(g) = 0 \text{ für fast alle } g \in G \right\}$$

$$x, y \in \Lambda G \subseteq \Lambda^G : \text{Für } g \in G \text{ ist } (x + y)(g) = x(g) + y(g), (\lambda x)(g) = \lambda x(g), (xy)(g) = \sum_h x(h)y(h^{-1}g) \text{ „Faltung“}$$

Erinnerung:  $A = \Lambda$ -Algebra,  $M = A$ -Linksmodul, d.h.  $(M, +)$  ist abelsche Gruppe mit binärer Operation von  $A \times M \rightarrow M : (a, m) \mapsto am$  mit  $1_A m = m, (ab)m = a(bm), a(m+n) = am + an, (a+b)m = am + bm \forall a, b \in A, m, n \in M$

$A^{mod}$  = Klasse der  $A$ -Linksmoduln,  ${}^{mod}A$  = Klasse der Rechtsmoduln.

Definition:  $G =$  Gruppe,  $K =$  Körper. Eine (lineare)-Darstellung von  $G$  vom Grad  $n$  ist ein Homomorphismus  $\rho : G \rightarrow GL_n(K)$  lineare Darstellung von  $G$  über dem  $K$ -Vektorraum  $V$  ist ein Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_K(V)$ .

Klar:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\varphi} & \text{Aut}_K(V) & \xrightarrow[\text{Wahl der Basis}]{\sim} & GL_n(K) & n = \dim_V(K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ KG & \rightarrow & \text{End}_K(V) & \xrightarrow[\text{Wahl der Basis}]{\sim} & M_{n \times n}(K) & \end{array}$$

Für eine  $K$ -Algebra  $A$  ist eine Darstellung von  $A$  über dem  $K$ -Vektorraum  $V$  ein  $K$ -Algebra-Homomorphismus  $A \rightarrow \text{End}_K(V) \cong M_{n \times n}(K)$  ( $\dim_K V = n$ )

Sei  $\rho : KG \rightarrow \text{End}_K(V)$  Darstellung. Dann wird  $V$  zum  $KG$ -Modul durch  $x \cdot m = (\rho(x))(m)$  für  $y \in KG$  und  $m \in V$ .

Umgekehrt: Ist  $V$  ein  $A$ -Modul, so wird durch  $\rho : A \rightarrow \text{End}_K(V) : a \mapsto \lambda_a, \lambda_a(v) = av$  für  $a \in A, v \in V$  eine Darstellung von  $A$  über  $V$  definiert.

So: Konzept der Darstellungen von  $A$  ist äquivalent zum Konzept der  $A$ -Moduln. (Vgl. Permutationsdarstellungen).

Homomorphismen von  $A$ -Moduln: Klar.

Homomorphismen von Darstellungen: Seien  $\rho : A \rightarrow \text{End}_K(V), \psi : A \rightarrow \text{End}_K(W)$  Darstellungen von  $A$ . Ein Homomorphismus von  $\rho$  nach  $\psi$  ist ein  $K$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ , so dass  $\forall a \in A : f \circ \rho(a) = \psi(a) \circ f$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \rho(a) \downarrow & & \downarrow \psi(a) \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Beachte:  $W = V$  mit  $f \in \text{Aut}_K(V)$  Homomorphismus von  $\rho$  nach  $\psi \Leftrightarrow \psi(a) = f \circ \rho(a) \circ f^{-1} \forall a \in A$

$\dim_K(V) = n, \tilde{\rho} : A \rightarrow M_{n \times n}(K), \tilde{\psi} : A \rightarrow M_{n \times n}(K)$  zugehörige Matrixdarstellungen nach Wahl einer Basis  $\mathcal{B}$ , so kann man  $f$  als Basiswechsel interpretieren:  $m_{\text{id}}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = m_f(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  für Basis  $\mathcal{C}$  von  $V$ .

$m_{\tilde{\psi}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = m_{\text{id}}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) m_{\tilde{\rho}}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) m_{\text{id}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  (Details: Übung)

Definition: Seien  $A, B$   $\Lambda$ -Algebren mit 1 und sei  $M$  ein  $A$ -Linksmodul und ein  $B$ -Rechtsmodul.  $M$  heißt  $A$ - $B$ -Bimodul falls gilt:

$\forall \alpha \in A, \beta \in B, m \in M : (\alpha m)\beta = \alpha(m\beta)$

( $M$   $A$ -Linksmodul und  $B$ -Linksmodul:  $\alpha(\beta m) = \beta(\alpha m)$ )

Beachte: Für die zugehörigen Darstellungen bedeutet das:  $\lambda_\alpha : M \rightarrow M : m \mapsto \alpha m, \rho_\beta : M \rightarrow M : m \mapsto m\beta$

(Abbildung  $\rho : B \rightarrow \text{End}_\Lambda(M)$  ist Antihomomorphismus, d.h.  $\rho_\beta \rho_\gamma = \rho_{\gamma\beta}$  für  $\gamma, \beta \in B$ )

Bedingung  $\Leftrightarrow \lambda_\alpha \rho_\beta = \rho_\beta \lambda_\alpha \forall \alpha \in A, \beta \in B$

d.h.  $\lambda_\alpha$  und  $\rho_\beta$  zentralisieren einander in  $\text{End}_\Lambda(M)$  ( $\forall \lambda \in \Lambda, m \in m : \lambda m = m\lambda$ )

5.1.3 Beispiel:  $M \in A^{mod} = \{\text{Links-}A\text{-Moduln}\}$ . Sei  $E = \text{End}_A(M)$ .  $E$  operiert auf  $M$  von rechts.

$E = \{b \in \text{End}_\Lambda(M) \mid (am)b = a(mb) \forall a \in A, m \in M\}$

Dann ist  $E$   $\Lambda$ -Algebra und  $M$  ein  $A$ - $E$ -Bimodul.

Beweis:  $A = \Lambda$ -Algebra  $\Rightarrow M$  ist  $\Lambda$ -Modul durch Einschränken,  $\lambda m = (\lambda 1_A)m$ . Durch  $\lambda m = m\lambda$  wird  $M$  ein  $\Lambda$ -Rechtsmodul, da  $\Lambda$  kommutativ ist.

Ein  $A$ -Endomorphismus ist dann auch ein  $\Lambda$ -Endomorphismus, d.h.  $E = \text{End}_A(M) \subseteq \text{End}_\Lambda(M)$ .

( Beachte:  $\{\mathbb{Z}\text{-Moduln}\} = \{\mathbb{Z}\text{-Bimoduln}\} = \{\text{abelsche Gruppen}\} )$

Für  $b \in E, m \in M$  und  $\lambda \in \Lambda$  sei  $\lambda b \in \text{End}_A(M)$  definiert durch  $m(\lambda b) = \lambda(mb) = (mb)\lambda = m(b\lambda)$ . So ist  $E$  eine  $\Lambda$ -Algebra. Rest klar.

Bemerkung:  $A$  und  $B$  seien  $\Lambda$ -Algebren,  $M$  ein  $A$ -Links- und  $B$ -Rechtsmodul.  $\lambda : A \rightarrow \text{End}_\Lambda(M) : a \mapsto \lambda_a, \rho : B \rightarrow \text{End}_\Lambda(M) : b \mapsto \rho_b, \rho_b(m) = mb$

$\rho$  Antihomomorphismus,  $\lambda$  Homomorphismus von  $\Lambda$ -Algebra

$\tilde{B} = \text{im } \rho \subseteq \text{End}_\Lambda(M) \supseteq \tilde{A} = \text{im } \lambda$

( $R$  Ring,  $R^{opp} =$  Ring auf Menge  $R$  mit Multiplikation  $*$  gegeben durch  $r * s = sr \forall r, s \in R$ )

Dann ist  $M$  ein  $A$ - $B$ -Bimodul  $\Leftrightarrow \tilde{B} \subseteq \text{End}_A(M) \subseteq \text{End}_\Lambda(M) \Leftrightarrow \tilde{A} \subseteq \text{End}_B(M) \subseteq \text{End}_\Lambda(M)$

Man sagt:  $M$  erfüllt Schur-Wyl-Dualität oder ist balanced oder erfüllt Bizentralisatoren Eigenschaft, falls gilt:  $\tilde{B} = \text{End}_A(M), \tilde{A} = \text{End}_B(M)$ .

$\rightsquigarrow$  Ausrechnen von  $\text{End}_A(M) : \Lambda = K$  Körper,  $M \in \Lambda^{mod}, \dim_K M = n < \infty, \rho : A \rightarrow M_{n \times n}(K)$  zugehörige Matrixdarstellung.

$G_a : \rho(a)X = X\rho(a), X \in M_{n \times n}K$ . Um  $E$  auszurechnen genügt es die Gleichungssysteme  $G_a$  für  $a \in A$  simultan zu lösen.

Angenommen,  $a_1, \dots, a_k \in A$  so, dass  $A$  die kleinste Unter algebra von  $A$  ist, die  $a_1, \dots, a_k$  enthält, d.h.  $\{a_1, \dots, a_k\}$  erzeugt die  $K$ -Algebra  $A$ , dann genügt es  $\rho(a_i)X = X\rho(a_i)$  simultan zu lösen  $\rightsquigarrow$  mühsamer Weg um  $E$  auszurechnen.

## b). Tensorprodukte

$A, B, C$  seien  $\Lambda$ -Algebren,  $\Lambda$  kommutativer Ring  $\ni 1$ .  ${}_A\text{mod}_B := \{A\text{-}B\text{-Bimoduln}\}$

Definition: Sei  $M \in {}_A\text{mod}_B, N \in {}_B\text{mod}_C$ . Eine Abbildung  $f : M \times N \rightarrow U \in {}_A\text{mod}_C$  heißt  $A$ - $C$ -bilinear und  $B$ -balanced, falls gilt  $\forall a \in A, b \in B, c \in C, m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N$ :

- i)  $f$  ist bilinear, d.h.  $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n), f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$
- ii)  $f(am, n) = af(m, n)$
- iii)  $f(m, nc) = f(m, n)c$
- iv)  $f(mb, n) = f(m, bn)$

Ein Tensorprodukt  $M \otimes_B N \in {}_A\text{mod}_C$  über  $B$  ist ein  $A$ - $C$ -Bimodul zusammen mit einer  $A$ - $C$ -bilinearen,  $B$ -balanced Abbildung  $\eta : M \times N \rightarrow M \otimes_B N$  so, dass folgende universelle Eigenschaft gilt:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\eta} & M \otimes_B N \\ & \searrow f & \downarrow \exists! \hat{f} \\ & & U \in {}_A\text{mod}_C \end{array}$$

mit  $\hat{f} \circ \eta = f$

$\mathcal{A}$  = freie abelsche Gruppe über

$$M \times N = \{z_1(m_1, n_2) + z_2(m_2, n_2) + \dots + z_k(m_k, n_k) \mid m_i \in M, n_i \in N, k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$I = \{(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), (mb, n) - (m, bn)\}$$

$$(b \in B, m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N)$$

$\mathcal{A}$  ist  $A$ -Linksmodul durch  $a(\sum z_i(m_i, n_i)) = (\sum z_i(am_i, n_i))$ ,  $C$ -Rechtsmodul analog.

$cA \in {}_A\text{mod}_C$ ,  $I$  ist  $A$ - $C$ -invariant  $\Rightarrow \langle I \rangle$  ist  $A$ - $C$ -Unterbimodul.

$$M \otimes_B N = \mathcal{A} / \langle I \rangle \in {}_A\text{mod}_C$$

$$\eta : M \times N \rightarrow M \otimes_B N : (m, n) \mapsto (m, n) + \langle I \rangle = m \otimes n \text{ (einfacher Tensor)}$$

Klar:  $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$  erzeugt  $M \otimes_B N$ , d.h.

$$M \otimes_B N = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i \mid m_i \in M, n_i \in N, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Bemerkung:  $M \in {}_A\text{mod}_B \subseteq \text{mod}_B, N \in {}_B\text{mod}$ .

Bilde  $M \otimes_B N$  mit  $M$  nur als  $B$ -Rechtsmodul.  $\tilde{X} = M \otimes_B N$  mit  $M$  als  $A$ - $B$ -Bimodul.

Dann ist  $X \in {}_A\text{mod}$  und  $X \cong \tilde{X}$  als  $A$ -Linksmodul.

Für  $a \in A$  definiere eine Abbildung  $f_a : M \times N \rightarrow M \times N : (m, n) \mapsto (am, n)$   
 $A$ - $\mathbb{Z}$ -bilinear,  $B$ -balanced (wegen  $(am)b = a(mb)$ , da  $M$   $A$ - $B$ -Bimodul).

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\eta} & M \otimes_B N \\ & \searrow f_a & \downarrow \exists! \hat{f}_a \\ & & M \otimes_B N \end{array}$$

mit  $\hat{f}_a(\sum m_i \otimes n_i) = \sum am_i \otimes n_i$

5.2.1 Fakten:

- i)  $M \in {}_A\text{mod}, A \in {}_A\text{mod}_A \Rightarrow A \otimes_A M \cong M$   
 Beweis:  $f(a, m) = am$

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \xrightarrow{\eta} & A \otimes_A M \\ & \searrow f & \downarrow \hat{f} \\ & & M \end{array}$$

$\hat{f}(\sum a_i \otimes m_i) = \sum a_i m_i \in M, \hat{f}^{-1} : M \rightarrow A \otimes_A M : m \mapsto 1_A \otimes m \in A \otimes M$

- ii) Tensorprodukte vertauschen mit direkten Summen:  $(\oplus_{i \in I}) \otimes_A N \cong \oplus_{i \in I} (M_i \otimes N)$   
 $M \cong \oplus_{i \in I} A_i, A_i \cong_A A, N \in {}_A\text{mod}$   
 $M \otimes_I N = (\oplus_{i \in I} A_i) \otimes N \cong \oplus_{i \in I} (A_i \otimes N) \cong N = \oplus_{i \in I} N_i$  mit  $N_i \cong N$  als  $A$ -Modul.

- iii)  $({}_A M \otimes_B N) \otimes_C L_D \cong {}_A M \otimes_B (N \otimes_C L)_D$  Assoziativität,  $N \in {}_B\text{mod}_C$

Beispiel:  $X := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = (0)$

$$1 = 2 \cdot 2 - 3$$

$$a \otimes b \in X : a \otimes b = 1a \otimes b = (4 - 3)(a \otimes b) = 4(a \otimes b) - 3(a \otimes b) = (4a) \otimes b - a \otimes (3b) = 0 \otimes b - a \otimes 0 = 0$$

5.2.2 Wichtiges Beispiel:  $K$  Körper,  $G$  Gruppe,  $H \leq G. M \in {}_{KH}\text{mod}$

Beachte:  $KG \in {}_{KG}\text{mod}_{KH}$

So:  $KG \otimes_{KH} M \in {}_{KG}\text{mod}$

Wir schreiben:  $\text{Ind}_H^G M =$  der von  $H$  nach  $G$  induzierte Modul.

Seien  $M, N \in {}_{KH}\text{mod}, f : M \rightarrow N$   $KH$ -linear. Dann ist  $\text{id}_{KG} \otimes f : KG \otimes_{KH} M \rightarrow KG \otimes_{KH} N$   $KG$ -linear.

5.2.3 Lemma: Seien  $M_1, M_2 \in {}_R\text{mod}_S$ ,  $R, S, T$   $\Lambda$ -Algebren,  $N_1, N_2 \in {}_S\text{mod}_T$ ,  $f : M_1 \rightarrow M_2$   $R$ - $S$ -linear,  $g : N_1 \rightarrow N_2$   $S$ - $T$ -linear.

Dann wird durch  $f \otimes g : M_1 \otimes_S N_1 \rightarrow M_2 \otimes_S N_2 : m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n)$  eine  $R$ - $T$ -lineare Abbildung definiert.

Beweis: Wir definieren Abbildung  $f \times g : M_1 \times N_1 \rightarrow M_2 \otimes_S N_2 : (m, n) \mapsto f(m) \otimes g(n)$ .

Leicht:  $f \times g$  ist  $R$ - $T$ -linear und  $S$ -balanced.  $((f \times g)(rm, n) = f(rm) \otimes g(n) = r(f(m) \otimes g(n)), (f \times g)(ms, n) = f(ms) \otimes g(n) = f(m)s \otimes g(n) = f(m) \otimes sg(n) = f(m) \otimes g(sn) = (f \times g)(m, sn))$

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times N_1 & \xrightarrow{\eta} & M_1 \otimes N_1 \\ & \searrow f \times g & \downarrow \exists! \widehat{f \times g} = f \otimes g \\ & & M_2 \otimes N_2 \end{array}$$

□

Sei  $\{g_i \mid i \in I\}$  Vertretersystem der Linksnebenklassen von  $H$  in  $G$ , d.h.  $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} g_i H$ . Sei  $g \in G$ , dann  $\exists! i \in I, h \in H : g = g_i \cdot h$ .

Also lässt sich jedes  $x \in KG$  eindeutig als Linearkombination  $x = \sum_{i \in I} g_i y_i$  mit  $y_i \in KH$  (fast alle 0) schreiben. ( $x = \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g = \sum_{i \in I} g_i (\sum_{h \in H} \lambda_{g_i h} h)$ ,  $\lambda_g \in K$  fast alle 0)

Also:  $KG_{KH} = \oplus_{i \in I} g_i KH$ , ( $KH$ -Rechtsuntermodul von  $KG_{KH}$ ,  $g_i KH \cong KH$  als  $KH$ -Rechtsmodul)

$KG_{KH}$  ist frei als  $KH$ -Modul, mit  $KH$ -Basis  $g_i$ .

Nun ist  $g_i H \otimes_{KH} M = g_i \otimes_{KH} M$

Wir haben gezeigt:  $\text{Ind}_{KH}^{KG} M = KG \otimes_{KH} M \cong \oplus_{i \in I} g_i \otimes M$  (mit  $g_i \otimes M \cong M$  als  $K$ -Vektorraum)  $\cong \oplus |I|$  vielen Kopien von  $KH$  als Vektorraum.

( $g_i \otimes M$  ist ein  $g_i KH g_i^{-1}$ -Modul)

Allgemein:  $S \subseteq R$  Ringe,  $M \in {}_S\text{mod}$ ,  ${}_R R_S \in {}_R\text{mod}_S$ ,  $\text{Ind}_S^R = R \otimes_S M \in {}_R\text{mod}$

Im allgemeinen ist aber  $R_S$  nicht frei. Es kann durchaus passieren, dass  $R \otimes_S M = (0)$ .

5.2.4 Lemma: Sei  $A, B$   $K$ -Algebren,  $K$  Körper. Dann wird  $A \otimes_K B$  zur  $K$ -Algebra vermöge der folgenden Multiplikation:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$$

Problem: Ist diese Multiplikation wohldefiniert?

Beweis: Übung

5.2.5 Korollar: Seien  $M \in {}_A\text{mod}$ ,  $N \in {}_B\text{mod}$ . Dann wird  $M \otimes_K N$  ein  $A \otimes_K B$ -Modul durch:  $(a \otimes b)(m \otimes n) = am \otimes bn$

5.2.6 Beobachtung: Sind  $G, H$  Gruppen, so ist  $K(G \times H) \cong KG \otimes_K KH$



Beweis:  $LAAG \Rightarrow KG \otimes_K KHG$  hat Basis  $\mathcal{B} = \{g \otimes h \mid g \in G, h \in H\}$

$$(g_1 \otimes h_1)(g_2 \otimes h_2) = (g_1 g_2) \otimes (h_1 h_2)$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$  ist Gruppenbasis von  $KG \otimes_K KH, \mathcal{B} \cong G \times H$  als Gruppe □

Ist  $X$  Gruppe,  $f : X \rightarrow G \times H$  Gruppenhomomorphismus. So kann dieser zu einem  $K$ -Algebrahomomorphismus  $f : KX \rightarrow KG \otimes_K KH$  fortgesetzt werden.

5.2.7 Definition: Sei  $G$  Gruppe, dann wird durch  $\Delta g = (g, g) \in G \times G$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus  $\Delta : G \rightarrow G \times G$  definiert. Es ist  $\Delta(\sum \lambda_g g) = \sum \lambda_g (g \otimes g)$ . Sind  $M, N \in {}_K G \text{mod}$ , so wird  $M \otimes_K N$  ein  $KG$ -Modul durch Einschränkung auf der  $KG \otimes_K KG$ -Operation aus 5.2.5 auf  $M \otimes_K M$  auf im  $\Delta \cong G$ . So gilt:  $g \in G, m \in M, n \in N$  ist  $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$ .

Vorsicht: Sei  $x = \sum \lambda_g g \in KG, m \in M, n \in N$ :

$$x(m \otimes n) = (\sum \lambda_g g)(m \otimes n) = \sum \lambda_g (gm \otimes gn)$$

$$xm \otimes xn = (\sum \lambda_g gm) \otimes (\sum \lambda_h hn) = \sum_{g \in G, h \in H} \lambda_g \lambda_h (gm \otimes hn)$$

Also ist i.A.  $x(m \otimes n) \neq xm \otimes xn$

### c). $KG$ -Moduln Grundlagen

$A = K$ -Algebra,  $K$  Körper,  $M \in {}_A \text{mod}$ . Ist  $m \in M$ , so ist  $A \cdot m = \{a \cdot m \mid a \in A\}$  ein  $A$ -Untermodul.

Ist  $S \subseteq M$ , so ist  $\langle S \rangle = \langle S \rangle_{A\text{-Modul}} = \sum_{s \in S} As \leq M$  der von  $S$  erzeugte Untermodul von  $M$ .

$\langle S \rangle = \bigcap_{U \subseteq M, s \subseteq U} U$  = kleinste Untermodul von  $M$ , der  $S$  enthält.  $S \subseteq M$  heißt Erzeugendensystem von  $M$  falls  $\langle S \rangle = M$ .

$M$  heißt endlich erzeugt, falls  $M$  ein endliches Erzeugendensystem hat.

$M$  heißt zyklischer  $A$ -Modul, falls  $M = A \cdot m$  für ein  $m \in M$ .

5.3.1 Satz: Sei  $M \in {}_A \text{mod}$ . Dann ist  $M$  zyklisch  $\Leftrightarrow M$  ist epimorphes Bild von  ${}_A A \in {}_A \text{mod}$ .

Beweis: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $M = Am$  zyklischer Modul. Definiere  $f : {}_A A \rightarrow M : a \mapsto a \cdot m$ .  $f$  ist  $A$ -linear:  $f(ba) = (ba)m = b(am) = bf(a), f(a+b) = (a+b)m = am + bm = f(a) + f(b)$ .

Klar: Wegen  $M = Am$  ist  $f$  Epimorphismus von  ${}_A A$  auf  $M$ .  $M \cong {}_A A / \ker f, \ker f = \{a \in A \mid am = 0\} = \text{ann}_A(m)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $f : {}_A A \rightarrow M$  Epimorphismus,  $m = f(1)$ . Sei  $x \in M, a \in A : f(a) = x$

Dann ist  $x = f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = am$ . Also ist  $M = Am$  zyklischer Modul.

Beispiel:  $M \in {}_A \text{mod}$  irreduzibel,  $0 \neq m \in M$ .  $(0) \neq Am \leq M \Rightarrow Am = M \Rightarrow M$  zyklisch.

5.3.2 Satz: Sei  $A$  endlich dimensionale  $K$ -Algebra und sei  $M \in {}_A \text{mod}$  endlich erzeugt. Dann ist  $\dim_K M < \infty$  und  $M$  besitzt eine Kompositionsreihe.

Beweis:  $M = \sum_{i=1}^k Am_i, \exists m_i \in M, k \in \mathbb{N}$

$Am_i$  ist zyklischer Modul und daher epimorphes Bild von  ${}_A A$ . Wegen  $\dim_K({}_A A) < \infty$  ist  $\dim_K(Am_i) < \infty$ , und daher  $\dim_K M \leq \sum_{i=1}^k \dim_K(Am_i) < \infty$ .

Da jeder  $A$ -Untermodul von  $M$  insbesondere ein  $K$ -Untervektorraum von  $M$  ist, muss jede echt absteigende Kette von  $A$ -Untermoduln von  $M$  terminieren. Also hat  $M$  eine Kompositionsreihe und Jordan-Hölder gilt.  $\square$

5.2.3 Korollar: Sei  $A$   $K$ -Algebra. Dann ist jeder einfache  $A$ -Modul zyklisch und daher epimorphes Bild vom regulären  $A$ -Modul  ${}_A A$ . Ist insbesondere  $\dim_K A < \infty$ , so sind alle irreduziblen  $A$ -Moduln endlich dimensional. Wegen  $\dim_K A < \infty$  hat  ${}_A A$  eine Kompositionsreihe und daher kommen nur endlich viele Kompositionsfaktoren vor. Also gibt es nur endliche viele nicht isomorphe irreduziblen  $A$ -Moduln.

Beweis: Sei  $M \in {}_A \text{mod}$  irreduzibel, und sei  $M \neq (0)$ . Sei  $0 \neq m \in M \Rightarrow M = A \cdot m$ , da  $0 \neq Am \leq M$  und  $M$  irreduzibel. Also ist  $Am = M$ , d.h.  $M$  ist zyklisch. Rest folgt.  $\square$

Bemerkung: Es ist im Allgemeinen falsch, dass jeder irreduzible  $A$ -Modul als Untermodul von  ${}_A A$  vorkommt! Für Gruppenalgebren  $KG$ ,  $|G| < \infty$ , stimmt dies aber!

Beispiele von  $KG$ -Moduln:

i)  ${}_K KG$  ist der reguläre  $KG$ -Modul. Die zugehörige (Matrix-)Darstellung  $\rho : G \rightarrow M_{|G| \times |G|}(K)$ :

$\mathcal{B} = G =$  Basis von  ${}_K KG$  geordnet

Sei  $g \in G$ . Dann ist  $g \cdot h \in G$  für ein  $h \in G$ . Man erhält die Permutationsmatrix, die die Linksmultiplikation von  $g$  auf  $G$  darstellt.

ii) Allgemeiner: Sei  $\Omega$  endliche  $G$ -Menge, und sei  $\rho : G \rightarrow \sigma_\Omega$  die zugehörige Permutationsdarstellung. Ordne  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ .

$$\begin{array}{ccc} \rho : G & \longrightarrow & \sigma_k \cong W \leq \text{GL}_n(K) \\ \downarrow & & \\ KG & \longrightarrow & M_{k \times k}(K) \end{array}$$

Modul:  $V =$  (freie)  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\Omega$ ,  $\sigma_\Omega \subseteq \text{End}_K(V)$

$\rho : KG \rightarrow \text{End}_K(V) : g \mapsto$  Permutationsmatrix.  $V \in {}_K G \text{mod}$  „Permutationsmodul“

iii) Der triviale  $KG$ -Modul ist  $K$  mit  $G$ -Operation  $g \cdot \lambda = \lambda \forall g \in G, \lambda \in K$ .

Das heißt  $G$  operiert „trivial“ auf  $K$ . Die zugehörige Darstellung ist gegeben als Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow K^* : g \mapsto 1_K$  bzw.  $\rho : KG \rightarrow K : \sum \lambda_g g \mapsto \sum \lambda_g$ , fast alle  $\lambda_g = 0$  (Epimorphismus).

Es ist der  $\ker \rho = \langle g - 1 \mid g \in G \rangle_{\text{Ideal}} \trianglelefteq KG$ .

(Für  $S \subseteq A = K$ -Algebra:  $\langle S \rangle_A = \bigcap_{I \trianglelefteq A, S \subseteq I} I =$  kleinstes Ideal von  $A$ , das  $S$  als Teilmenge enthält  $= \sum_{s \in S} AsA$ )

$\dim_K(\ker \rho) = |G| - 1$

Das Ideal  $\langle g - 1 \mid g \in G \rangle_{\text{Ideal}}$  heißt Augmentationsideal von  $G$  und wird mit  $\Omega KG$  bezeichnet.

iv) Sei  $H \leq G$ ,  ${}_H K$  triviale  $KH$ -Modul,  $G = \dot{\bigcup}_{i \in I} g_i H$ ,  $\{g_i \mid i \in I\}$  Vertretersystem von  $H$ -Linksnebenklassen in  $G$ .

$G$  operiert auf  $G \setminus H = \{g_i \mid i \in I\}$  durch Linkstranslation: Für  $g \in G, i \in I$  gibt es genau ein  $j \in I$  und  $h \in H : gg_i = g_j h$

$g \cdot g_i \Rightarrow g_j$  ist Permutationsdarstellung.

Sei  $V$  der  $K$ -Vektorraum mit Basis  $g_i, i \in I$ . Dann wird  $V$  zum  $KG$ -Modul nach ii).

$\varphi : KG \otimes_{KH} K \Rightarrow V : \sum_{i \in I} \alpha_i g_i \otimes 1_k \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i g_i$ , d.h. Permutationsmodul von der  $G$ -Menge  $G \setminus H$  ist  $KG \otimes_{KH} K = \text{Ind}_{KH}^{KG}({}_H K)$

Umgekehrt: Ist  $\Omega$  eine  $G$ -Menge und ohne Einschränkung transitiv (disjunkte Vereinigung von Orbits  $\leftrightarrow$  direkte Summe der zugehörigen Permutationsmodule).

Sei  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_k), H = \text{Stab}_G(\omega_1)$ . Dann ist der Permutationsmodul nach ii) isomorph zu  $KG \otimes_{KH} K = \text{Ind}_H^G({}_H K)$ .

v) Sei  $V \in {}_{KG} \text{mod}, V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ . Dann wird  $V^*$  zum  $KG$ -Modul durch  $f \in V^*, g \in G, v \in V : (gf)(v) := f(g^{-1}v)$ .

D.h. für fast alle  $\lambda_g = 0$ :  $((\sum \lambda_g g)f)(v) = \sum \lambda_g f(g^{-1}v) \in K$

5.2.4 Lemma: Sei  $A, B, C, D, \dots$   $K$ -Algebren,  ${}_A M_B \in {}_A \text{mod}_B, {}_A N_C \in {}_A \text{mod}_C$ . Dann wird  $F := \text{Hom}_A({}_A M_B, {}_A N_C) \in {}_B \text{mod}_C$  durch:

$$(bf)(m) := f(mb), (fc)(m) := f(m)c$$

Analog: Ist  $M \in {}_A \text{mod}_B, N \in {}_C \text{mod}_B \Rightarrow F := \text{Hom}_B({}_A M_B, {}_C N_B) \in {}_C \text{mod}_A$  durch:

$$(cfa)(m) := c \cdot f(am)$$

Beweis:  $bf$  ist wohldefinierte Abbildung von  $M \rightarrow N$ . Zu zeigen:  $bf$  ist  $A$ -linear:

$$(bf)(m_1 + m_2) = f((m_1 + m_2)b) = f(m_1 b + m_2 b) = f(m_1 b) + f(m_2 b) = (bf)(m_1) + (bf)(m_2)$$

$$(bf)(am) = f((am)b) = f(a(mb)) = a \cdot f(mb) = a \cdot (bf)(m)$$

Weiter ist z.Bsp:

$$((b_1 b_2)f)(m) = f(m(b_1 b_2)) = f((mb_1)b_2) = (b_2 f)(mb_1) = (b_1(b_2 f))(m) \text{ usw. (Übung)}$$

Also ist  $\text{Hom}_A(M, N)$  ein Links- $B$ -Modul, jetzt Rechts- $C$ -Modul:  $(fc)(m_1 + m_2) = f(m_1 + m_2)c = (f(m_1) + f(m_2))c = f(m_1)c + f(m_2)c = (fc)(m_1) + (fc)(m_2)$

$$(fc)(am) = f(am)c = (a \cdot f(m))c = a(f(m)c) = a(fc)(m)$$

$$(f(c_1 c_2))(m) = f(m)(c_1 c_2) = (f(m)c_1)c_2 = (fc_1)(m)c_2 = ((fc_1)c_2)(m) \text{ usw.}$$

und:  $((bf)c)(m) = ((bf)(m))c = (f(mb))c = (fc)(mb) = (b(fc))(m)$ , damit ist  $\text{Hom}_A(M, N)$  ein  $B$ - $C$ -Bimodul.  $\square$

Beispiel:  $V \in {}_A \text{mod} \Rightarrow V^* \in \text{mod}_A, V^* = \text{Hom}_K({}_A V_K, K_K) \in \text{mod}_A$

$$f \in V^*, a \in A : (fa)(v) = f(av)$$

5.2.5 Lemma: Sei  $A$   $K$ -Algebra,  $\iota : A \rightarrow$  Antihomomorphismus von  $K$ -Algebren, d.h.  $\iota$  ist  $K$ -linear,  $\iota(a_1 a_2) = \iota(a_2) \iota(a_1)$ .

Sei  $V \in {}_A\text{mod}$ . Dann wird  $V \in \text{mod}_A$  durch  $v.a = \iota(a)v$

Beweis:  $v.(a_1 + a_2) = \iota(a_1 + a_2)v = \iota(a_1)v + \iota(a_2)v = v.a_1 + v.a_2$  und

$v.(a_1 a_2) = \iota(a_1 a_2)v = \iota(a_2)\iota(a_1)v = \iota(a_2)(v a_1) = (v a_1).a_2$  usw.  $\square$

5.2.6 Lemma: Sei  $G$  Gruppe. Dann induziert  $g \mapsto g^{-1}$  einen Antihomomorphismus von  $KG$  in  $KG$  ( $\sum \lambda_g g \mapsto \sum \lambda_g g^{-1}$ ).

5.2.7 Korollar:  $V \in {}_{KG}\text{mod}$ . Dann wird  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  zum  $KG$ -Modul durch  $(gf)(v) := f(g^{-1}v)$ .

5.2.8 Korollar: Seien  $V, W \in {}_{KG}\text{mod}$ . Dann wird  $\text{Hom}_K(V, W)$  zum  $KG$ -Modul durch  $(g.f)(v) := gf(g^{-1}v)$

(Da  $\text{Hom}_K({}_{KV}V_K, {}_{KW}W_K) \in {}_{KG}\text{mod}_{KG}$ )

Beweis:  $\text{Hom}_K({}_{KV}V_K, {}_{KW}W_K) \in {}_{KG}\text{mod}_{KG}$  durch  $(gfh)(v) = gf(hv)$  für  $f \in \text{Hom}_K(V, W), g, h \in G, v \in V$ . Also ein  $KG \otimes_K KG^{op}$ -Modul.

Mit  $\Delta : G \Rightarrow G \times G^{op} : g \mapsto (g, g^{-1})$  wird daher  $\text{Hom}_K(V, W)$  zum Links- $KG$ -Modul durch Einschränken.

$(g \otimes g^{-1})f = gf g^{-1}$

Beachte:  $(g.f)(v) = g(f(g^{-1}v)) \Rightarrow ((g_1, g_2).f)(v) = (g_1 g_2)(f(g_2^{-1} g_1^{-1} v)) = g_1(g_2 f(g_2^{-1}(g_1^{-1} v))) = g_1((g_2 f)(g_1^{-1} v)) = (g_1.g_2.f)(v)$

5.2.9 Definition und Lemma: Sei  $M \in {}_{KG}\text{mod}$ . Dann ist  $M^G = \{m \in M \mid gm = m \forall g \in G\}$  der größte Untermodul von  $M$ , auf dem  $G$  trivial operiert.  $M^G$  ist direkte Summe von  $\dim_K(M^G)$  vielen Kopien des trivialen  $G$ -Moduls  $K$ . Die Elemente von  $M^G$  werden  $G$ -Invarianten genannt.

Beweis: leicht.

$(i \mid i \in I)$   $K$ -Basis von  $M^G \Rightarrow M^G = \bigoplus_{i \in I} K v_i, K v_i \cong K = \text{trivialer } KG\text{-Modul}$   $\square$

5.2.10 Satz: Sei  $M, N \in {}_{KG}\text{mod}$  und sei  $\text{Hom}_K(M, N) \in {}_{KG}\text{mod}$  wie in 5.2.8. Dann ist  $\text{Hom}_K(M, N)^G \cong \text{Hom}_{KG}(M, N)$  (als  $K$ -Vektorraum).

Beweis: Sei  $f \in \text{Hom}_K(M, N)$ . Dann ist  $f \in \text{Hom}_K(M, N)^G \Leftrightarrow g.f = f \forall g \in G \Leftrightarrow (g.f)(v) = f(v) = gf(g^{-1}v) \forall g \in G, v \in M \Leftrightarrow f(gv) = gf(v) \Leftrightarrow f \in \text{Hom}_{KG}(M, N)$

5.2.11 Satz: Sei  $U, V \in {}_{KG}\text{mod}$  endlicher Dimension. Dann ist  $\text{Hom}_K(U, V) \cong U^* \otimes V$  als  $KG$ -Moduln.

Spezialfall:  $U = V, \dim_K(V) < \infty$ . Dann ist  $\text{End}_{KG}(V) \cong (V^* \otimes V)^G$  als  $K$ -Vektorraum.

Beweis 5.2.11:  $U^*$  ist  $G$ -Modul durch:  $\alpha \in U^* : (g\alpha)(u) = \alpha(g^{-1}u)$  (siehe weit oben), und daher wird  $U^* \otimes V$  zum  $G$ -Modul durch  $g(\alpha \otimes v) = (g\alpha) \otimes (gv)$ .

Definiere  $\Gamma : U^* \otimes_K V \rightarrow \text{Hom}_K(U, V)$  durch  $\alpha \otimes v \mapsto A_{\alpha, v}$  mit  $A_{\alpha, v}(u) := \alpha(u) \cdot v \in V$ .

Klar ist:  $A_{\alpha, v}$  ist Abbildung  $U \rightarrow V$ . Zu zeigen:  $A_{\alpha, v}$  ist  $K$ -linear:

$A_{\alpha, v}(u_1 + u_2) = (\alpha(u_1 + u_2))v = (\alpha(u_1) + \alpha(u_2))v = \alpha(u_1)v + \alpha(u_2)v = A_{\alpha, v}(u_1) + A_{\alpha, v}(u_2)$

$A_{\alpha, v}(\lambda u) = \lambda A_{\alpha, v}(u)$  ebenso. So ist  $A_{\alpha, v} \in \text{Hom}_K(U, V)$ .

Definiere  $\hat{\Gamma} : U^* \times V \rightarrow \text{Hom}_K(U, V) : (\alpha, v) \mapsto A_{\alpha, v}$

$$\hat{\Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, v)(u) = A_{\alpha_1 + \alpha_2, v}(u) = ((\alpha_1 + \alpha_2)(u))v = (\alpha_1(u) + \alpha_2(u))v = \alpha_1(u)v + \alpha_2(u)v = A_{\alpha_1, v}(u) + A_{\alpha_2, v}(u) = (A_{\alpha_1, v} + A_{\alpha_2, v})(u)$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, v) = \hat{\Gamma}(\alpha_1, v) + \hat{\Gamma}(\alpha_2, v)$$

Ähnlich  $\hat{\Gamma}(\alpha, v_1 + v_2) = \hat{\Gamma}(\alpha, v_1) + \hat{\Gamma}(\alpha, v_2)$ , also  $\hat{\Gamma}$  bilinear.

$\lambda \in K : \hat{\Gamma}(\alpha\lambda, v)(u) = A_{\alpha\lambda, v}(u) = (\alpha\lambda)(u)(v) = \alpha(u)\lambda v = A_{\alpha, \lambda v}(u) = \hat{\Gamma}(\alpha, \lambda v)$ , also ist  $\hat{\Gamma}$  auch  $K$ -balanced. Daher ist (universelle Eigenschaft)  $\Gamma$  wohldefinierte  $K$ -lineare Abbildung.

Ist  $(u_1, \dots, u_n)$   $K$ -Basis von  $U$  und  $(u_1^*, \dots, u_n^*)$  duale Basis ( $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ ), so kann jedes Element von  $U^* \otimes_K V$  eindeutig als Summe  $\sum_{i=1}^n u_i^* \otimes x_i$  mit  $x_i \in V$  geschrieben werden. ( $U^* = \bigoplus_{i=1}^n K u_i^* \Rightarrow U^* \otimes_K V \cong \bigoplus_{i=1}^n (u_i^* \otimes V)$ )

$$\text{Sei } 1 \leq j \leq n : \Gamma(\sum_{i=1}^n u_i^* \otimes x_i)(u_j) = \sum_{i=1}^n \Gamma(u_i^* \otimes x_i)(u_j) = \sum u_i^*(u_j)x_i = x_j$$

So  $\Gamma(\sum_{i=1}^n u_i^* \otimes x_i) = 0 \Leftrightarrow x_j = 0 \forall j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_i^* \otimes x_i = 0 \Rightarrow \Gamma$  injektiv.

Wegen  $\dim_K(U^* \otimes V) = \dim_K(U^*) \cdot \dim_K(V) = \dim_K(U) \cdot \dim_K(V) = \dim_K(\text{Hom}_K(U, v))$  ist  $\Gamma$  ein  $K$ -Isomorphismus.

Bleibt zu zeigen:  $\Gamma$  ist  $G$ -linear.  $g \in G, \alpha \in U^*, v \in V, u \in U :$

$$\Gamma(g(\alpha \times v))(u) = \Gamma(g\alpha \otimes gv)(u) = A_{g\alpha, gv}(u) = (g\alpha)(u) \cdot gv = \alpha(g^{-1}u) \cdot gv$$

$$(g\Gamma(\alpha \times v))(u) = (g \cdot A_{\alpha, v})(u) = g \cdot (A_{\alpha, v}(g^{-1}u)) = \alpha(g^{-1}u)gv \quad \square$$

5.2.12 Satz: Seien  $U, V \in {}_K G\text{mod}, |G| = n < \infty$  und sei  $\text{char } K = p$  mit  $p \nmid n$ , oder sei  $\text{char } K = 0$ . Dann ist  $|G| \cdot 1_K \neq 0$ , d.h.  $\frac{1}{|G|} = (|G| \cdot 1_K)^{-1}$  existiert in  $K$ .

Sei  $f : U \rightarrow V$   $K$ -linear. Definiere  $\hat{f}_G : U \rightarrow V : u \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}u)$ ;  $\hat{f}_G$  ist  $KG$ -linear.  $\hat{f}_G = \text{Tr}_1^G(f)$  „Spur“.

Beweis:  $\hat{f}_G$  ist wohldefinierte Abbildung von  $U \rightarrow V$ .  $\hat{f}_G(u_1 + u_2) = \frac{1}{|G|} \sum gf(g^{-1}(u_1 + u_2)) = \frac{1}{|G|} \sum gf(g^{-1}u_1) + \frac{1}{|G|} \sum gf(g^{-1}u_2) = \hat{f}_G(u_1) + \hat{f}_G(u_2)$ .  $\hat{f}_G(\lambda u) = \lambda \hat{f}_G(u)$  analog.

Also ist  $\hat{f}_G \in \text{Hom}_K(U, V)$ .

Sei  $h \in G$ , dann ist  $(h\hat{f}_G)(u) = h \cdot \hat{f}_G(h^{-1}(u)) = \frac{1}{|G|} h(\sum_g gf(g^{-1}(h^{-1}u))) = \frac{1}{|G|} \sum_g (hg)f((hg)^{-1}u) = \frac{1}{|G|} \sum_g gf(g^{-1}u) = \hat{f}_G(u)$ .

Also ist  $h \cdot \hat{f}_G = \hat{f}_G$ , d.h.  $\hat{f}_G \in \text{Hom}_K(U, V)^G = \text{Hom}_{KG}(U, V)$ . □

5.2.13 Satz (Maschke): Sei  $G$  endliche Gruppe,  $\text{char } K = p \geq 0$ . Sei  $p$  kein Teiler von  $|G|$ . Sei  $U \in {}_K G\text{mod}$  und  $V \leq U$ . Dann ist  $V$  direkter Summand von  $U$ , d.h.  $\exists W \leq U : V \cap W = (0), V + W = U$ .

Beweis: LAAG  $\Rightarrow \exists \tilde{W} = K$ -Unterraum von  $U$  mit  $V + \tilde{W} = U$ . Sei  $\tilde{\pi}$  die natürliche Projektion von  $U$  auf  $V$  entlang  $\tilde{W}$ , d.h.  $u \in U \Rightarrow \exists! v \in V, \exists! w \in \tilde{W} : u = v + w \Rightarrow \tilde{\pi}(u) = v$ .

$$\Rightarrow \tilde{\pi}|_V = \text{id}_V, \tilde{\pi}|_{\tilde{W}} = 0.$$

Nach 5.2.12 ist  $\pi = \text{Tr}_1^G(\tilde{\pi})$   $KG$ -linear,  $\pi(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\tilde{\pi}(g^{-1}u)$ .

Sei  $v \in V \leq U$ . Dann ist  $\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_g g\tilde{\pi}(g^{-1}v) = \frac{1}{|G|} \sum_g gv = \frac{1}{|G|} \sum_g v = v$ .

$$\Rightarrow U = V \oplus \ker \pi$$

5.4.16 Theorem: Sei  $\Delta$  Divisionsalgebra,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\Delta^n$  (bis auf Isomorphie) der einzige einfache  $A$ -Modul,  $A = M_{n \times n}(\Delta)$ .

Es gilt:  ${}_A A = \bigoplus_{n \text{ Kopien}} \Delta^n$

Beweis: Sei  $0 \neq x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \Delta^n \Rightarrow \exists 1 \leq i \leq n : \alpha_i \neq 0$ .

$\alpha_i^{-1} E_{ii} x = e_i \in \xi_n = \text{natürliche Basis von } \Delta^n$

$\Rightarrow E_{ji} e_i = e_j$ , also  $e_j \in A \cdot x \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow \Delta^n = A \cdot x$ .

Also ist  $\Delta^n$  einfach.

Sei für  $1 \leq i \leq n$   $S_i$  die Menge der Matrizen aus  $A$ , die 0 sind bis auf die  $i$ . Spalte.

Dann ist  $S_i \leq {}_A A$ .

$S_i E_{ij} = S_j$ .  $\varphi_{E_{ij}} = \text{Rechtsmodul mit } E_{ij} \text{ ist } A\text{-Modul Isomorphismus von } S_i \text{ auf } S_j$ .

$S_i \cong \Delta^n$ . Also ist  ${}_A A \cong S_1 \oplus \dots \oplus S_n \cong \bigoplus_{n \text{ Kopien}} \Delta^n$ .

Definition: Eine  $K$ -Algebra  $A$  heißt einfach („simple“), falls (0) und  $A$  die einzigen Ideale von  $A$  sind.

5.4.17 Lemma: Einfache Algebren sind halbeinfach (semisimple).

Beweis: Sei  $A$  eine einfache Algebra,  $\Sigma = \text{Summe aller einfachen Untermoduln von } {}_A A$ .

Klar:  $\Sigma$  ist Linksideal von  $A$ . Sei  $S$  einfacher Untermodul von  ${}_A A$ , und sei  $a \in A$ .

$\rho_a : S \rightarrow A : s \mapsto sa$  ist  $A$ -Modulhomomorphismu, und daher ist  $S \cdot a = \text{im } \rho_a = (0)$  oder  $S \cdot a = \text{einfacher } A\text{-Modul}$ .

In beiden Fällen haben wir  $Sa \subseteq \Sigma$ , daher ist  $\Sigma$  auch Rechtsideal von  $A$ , also ist  $\Sigma$  Ideal von  $A$ .

${}_A A$  hat einfache Untermoduln ( $\leq (0)$ ), daher ist  $\Sigma \leq (0)$ . Da  $A$  einfach ist, ist  $\Sigma = A$  und daher  $A$  semisimple wegen Lemma 5.4.2 (Charakterisierung von „ss“) und 5.4.13 (Algebra ss.  $\Leftrightarrow {}_A A$  ss.).  $\square$

5.4.18 Theorem: Sei  $\Delta$  Divisionsalgebra und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $A = M_{n \times n}(\Delta)$  einfache Algebra.

Beweis: Sei  $(0) \neq J \triangleleft A$ . Sei  $0 \neq a \in J \Rightarrow \exists \alpha_{ij} \in \Delta : a = \sum \alpha_{ij} E_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$ .

$\exists 1 \leq r, s \leq n : \alpha_{rs} \neq 0$ . Sei  $1 \leq l, k \leq n$ . Dann ist  $J \ni b = \alpha_{rs}^{-1} E_{lr} a E_{sk} = \sum \alpha_{rs}^{-1} E_{lr} \alpha_{ij} E_{ij} E_{sk} = \sum \alpha_{rs}^{-1} \alpha_{ij} E_{lr} E_{ij} E_{sk} = \alpha_{rs}^{-1} \alpha_{rs} E_{lk} = E_{lk}$

$\Rightarrow E_{lk} \in J \forall 1 \leq l, k \leq n \Rightarrow J = A$ .  $\square$

$B_1, \dots, B_r = \text{Algebren}$

$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r$  „ringdirekte“ Summe, d.h. als  $\Lambda$ -Modul ist Summe direkt mit Multiplikation komponentenweise.

$\tilde{B}_i = \{(b_1, \dots, b_r) \mid b_j \in B_j, b_j = 0 \text{ für } j \neq i\} \Rightarrow \tilde{B}_i \cong B_i \text{ als } \Lambda\text{-Algebra}$ .

$\tilde{B}_i \triangleleft B, b_1 \in \tilde{B}_i, b_2 \in \sum_{i \neq j} B_j \Rightarrow b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$

$\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = (0) (i \neq j)$ .

$\tilde{B}_i$  heißen „Blöcke“ von  $B$  (Blockideale).

5.4.19 Lemma:  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_r$  ringdirekte Summe von Algebren  $B_i$ . Dann sind die

zweiseitigen Ideale von  $B$  genau die Mengen der Form  $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_r$  mit  $J_i \trianglelefteq B_i$  ( $J_i = J \cap \tilde{B}_i$ ).

Beweis: Setze  $J_i = J \cap B_i \trianglelefteq B$ . Klar:  $\sum_{i=1}^r J_i = \bigoplus_{i=1}^r J_i - i \subseteq J$ . Sei  $b \in J, b = b_1 + \dots + b_r$  mit  $b_i \in B_i$  und  $1 = e_1 + \dots + e_r, e_j = 1_{B_j}$ .

Dann ist  $b \cdot e_1 = b_1 e_1 + b_2 e_1 + \dots + b_r e_1 = b_1 \in J_1$ , analog  $b_i \in B_i \Rightarrow$  Behauptung.

5.4.20 Theorem: Sei  $r \in \mathbb{N}, \Delta_i$  Divisionsalgebra über  $K$  endlicher Dimension,  $n_i \in \mathbb{N}, B_i = M_{n_i \times n_i}(\Delta_i) \forall 1 \leq i \leq r$ .

Sei  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_r$  ringdirekte Summe. ( $\dim_K B = \sum_{i=1}^r \dim_K(\Delta_i) n_i^2 < \infty$ ). Dann ist  $B$  semisimple, und es gibt exakt  $r$  viele nicht isomorphe einfache  $B$ -Moduln, und genau  $2^4$  zweiseitige Ideale von  $B$ , nämlich  $\bigoplus_{j \in J} B_j$  mit  $J \subseteq \{1, \dots, r\}$  (Ideale), einfachen  $B$ -Moduln  $S_1, \dots, S_r$  mit  $S_i \leq_{B_i} B_i$  einfach.

Beweis: Ist  $S \leq_{B_i} B_i$  einfacher Untermodul, so ist auch  $S$  ein einfacher  $B$ -Modul mit  $b \cdot x = 0 \forall b \in B_j$  mit  $j \neq i$ . ( $U \leq_{B_i} B_i \leq_{\text{Liid}} BB$  immer).

Haben gesehen (5.4.16):  $\forall 1 \leq i \leq r$  gibt es genau einen einfachen  $B_i$ -Modul  $S_i, B_i \cong$

$$\bigoplus_{n_i \text{ Kopien}} S_i. \Rightarrow {}_B B \cong \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{n_i \text{ Kopien}} S_i.$$

Insbesondere ist  ${}_B B$  (direkte) Summe einfacher Untermoduln, und daher nach 5.4.13 semisimple. Jeder einfache  $B$ -Modul ist daher isomorph zu einem  $S_i$  mit  $1 \leq i \leq r$  (5.4.14).

Behauptung folgt sofort aus 5.4.18 und 5.4.19.  $\square$

5.4.21 Satz: Sei  $0 \neq e^2 = e \in B \Rightarrow \text{End}_B(Be) \cong eBe$ .

5.4.22 Lemma: Sei  $B$  Algebra. Dann ist  $M_{n \times n}(B)^{op} \cong M_{n \times n}(B^{op})$ .

Beweis Idee:  $M_{n \times n}(B)^{op} \rightarrow M_{n \times n}(B^{op}) : a \mapsto a^t$  ist Isomorphismus.

5.4.23 Theorem (Wedderburn): Eine  $K$ -Algebra  $A$  ( $\dim_K A < \infty$ ) ist semisimple  $\Leftrightarrow A = \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i \times n_i}(\Delta_i)$  mit  $\Delta_i =$  Divisionsalgebra über  $K$  mit  $\dim_K \Delta_i < \infty$ .

Beweis: „ $\Leftarrow$ “ ist 5.4.20.

Sei also  $A$  semisimple. Sei  $S_1, \dots, S_r$  eine vollständige Menge paarweiser nicht isomorpher einfacher  $A$ -Moduln und sei  $\Delta_i = \text{End}_A(S_i)$  Schiefkörper ( $\dim_K \Delta_i = k$ ),  $n_i = \dim_{\Delta_i}(S_i)$

Da  ${}_A A$  semisimple gibt es  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{N} : {}_A A = S_1^{\oplus v_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus v_r}$ .

5.4.21  $\Rightarrow \text{End}_A({}_A A) = 1 \cdot A \cdot 1 \cong A$

$\text{End}_A(S_1^{\oplus v_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus v_r}) \cong_{\text{Satz 5.4.12}} M_{v_1 \times v_1}(\Delta_1) \oplus \dots \oplus M_{v_r \times v_r}(\Delta_r)$

5.4.20  $\Rightarrow v_i = n_i$   $\square$ .

5.4.25 Spezialfall:  $A$  semisimple  $K$ -Algebra,  $K$  algebraisch abgeschlossen. Dann  $\exists n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N} : A \cong M_{n_1 \times n_1}(K) \oplus \dots \oplus M_{n_r \times n_r}(K)$

$\{S_1, \dots, S_r\} =$  vollständige Menge nicht isomorpher einfacher  $A$ -Moduln,  $\dim_K S_i = n_i$ .

# VI. Charaktere

## 1. Charaktere

$G =$  endliche Gruppe, alle  $\mathbb{C}G$ -Moduln sind endlich erzeugt.

6.1.1 Anmerkung:  $G =$  endliche Gruppe  $\Rightarrow$  Maschke  $\mathbb{C}G$  ist semisimple.  
 $\Rightarrow \exists n_i \in \mathbb{N} : \mathbb{C}G \cong M_{n_1 \times n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r \times n_r}(\mathbb{C})$  6.1.2 :  $\sum n_i^2 = |G|$

Bemerkung:  $\text{char } K \nmid |G| \Rightarrow KG$  semisimple.  $KG \cong M_{n_1 \times n_1}(\Lambda_1) \oplus \dots \oplus M_{n_r \times n_r}(\Lambda_r)$

Fakten: 1)  $\Lambda_i$  kommutativ

2)  $K = \mathbb{C} : n_i$  Teiler von  $|G|$

6.1.3 Theorem:  $|\{\text{einfache } \mathbb{C}G\text{-Moduln}\}| = |\{\text{Konjugationsklassen von } G\}| = \dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G)$

Beweis:  $\mathbb{C}G = M_{n_1 \times n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r \times n_r}(\mathbb{C}) \exists r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$  (6.1.1)

$\Rightarrow_{5.4.23}$  Anzahl nicht isomorpher irreduzibler  $\mathbb{C}G$ -Moduln  $= r$

Klar:  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_r$  ringdirekte Summe  $\Rightarrow Z(B) = Z(B_1) \oplus \dots \oplus Z(B_r)$

$Z(M_{n \times n}(\mathbb{C})) = \{\alpha 1_M \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ . Also ist  $\dim_K(Z(\mathbb{C}G)) = r$ .

Sei  $x = \sum \alpha_g g$  mit  $\alpha_g \in \mathbb{C}$

$x \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow hx = xh \forall h \in G \Leftrightarrow x = hxh^{-1} \forall h \in G$

d.h.  $x \in Z(\mathbb{C}G) \Leftrightarrow \sum \alpha_g g = \sum \alpha_g hgh^{-1} \forall h \in G$

$\sum \alpha_g g = \sum \alpha_{hgh^{-1}} g \Rightarrow \forall h \in G : \alpha_{hgh^{-1}} = \alpha_g$ .

Sei  $C_1, \dots, C_m$  Konjugationsklassen von  $G$ ,  $g_i \in C_i, \hat{C}_i = \sum_{h \in C_i} h$ .

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^m \alpha_g \hat{C}_i$ .

Klar:  $(\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m) \subseteq \mathbb{C}G$  lineare unabhängig/ $\mathbb{C}$ .

$\Rightarrow (\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m)$  ist  $\mathbb{C}$ -Basis von  $Z(\mathbb{C}G) \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(Z(\mathbb{C}G)) = m =$  Anzahl der Konjugationsklassen  $= r =$  Anzahl der irreduziblen  $\mathbb{C}G$ -Moduln.

$G =$  endliche Gruppe,  $\mathbb{C}G, M \in {}_{\mathbb{C}G}\text{mod}$ , zugehörige Darstellung  $\varphi : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$

Definition: Sei  $\varphi : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$  Darstellung,  $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ . Dann heißt die Abbildung  $\chi_M = \chi_{\varphi} : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \text{tr}(\varphi(g))$  („gewöhnlicher“) Charakter zur Darstellung  $\varphi$ .

Beachte:  $\varphi(g) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(M) \cong M_{n \times n}(\mathbb{C})$



$\text{tr}(m_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}))$  ist unabhängig von der Wahl von  $\mathcal{B}$ , da  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , also  $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(AP^{-1}P) = \text{tr}(A)$ .

Also ist die Spur  $\text{tr}(f)$  für  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$  wohldefiniert, wenn wir  $\text{tr}(f) := \text{tr}(m_f(\mathcal{B}, \mathcal{B}))$  setzen für irgendeine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $M$ .

Klar: Ist  $M \cong N$ ,  $M, N \in {}_{\mathbb{C}G}\text{mod}$ , so ist  $\chi_M = \chi_N$ .

Seien  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(M) \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{C})$  ( $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ )

und  $\psi : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(N) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  ( $\dim_{\mathbb{C}} N = n$ )

Erinnerung: Sei  $\tau : M \rightarrow N$   $\mathbb{C}G$ -Isomorphismus. Dann gilt:  $m = n$  und  $\forall g \in G$ :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi(g)} & M \\ \tau \downarrow & & \tau \downarrow \\ N & \xrightarrow{\psi(g)} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}(g)} & \mathbb{C}^n \\ \tau \downarrow & & \tau \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{\psi}(g)} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \tau \tilde{\varphi}(g) &= \tilde{\psi}(g) \tau \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(g) = \tau^{-1} \tilde{\psi}(g) \tau \\ \Rightarrow \chi_M(g) &= \text{tr}(\tilde{\varphi}(g)) = \text{tr}(\tilde{\psi}(g)) \forall g \in G \end{aligned}$$

Beispiel:

i) Sei  $M = \mathbb{C}_G$  triviale  $\mathbb{C}G$ -Modul, d.h.  $(\sum \lambda_g g)z = (\sum \lambda_g)z$ , ( $\lambda_g, z \in \mathbb{C}$ )  
 $\chi_M : g \rightarrow 1 \in \mathbb{C}$

ii) Sei  $\Omega$  eine transitive  $G$ -Menge,  $M_{\Omega} =$  zugehöriger  $\mathbb{C}G$ -Modul.

Ohne Einschränkung  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ ,  $G \hookrightarrow \sigma_n \cong W \leq \text{GL}_n(\mathbb{C})$

Sei  $P_{\pi} =$  Permutationsmatrix zu  $\pi \in \sigma_n$ ,  $\text{tr}(P_{\pi}) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \pi(i) = i\}|$ .

$\text{tr}(g) = |\{w \in \Omega \mid gw = w\}|$

Spezialfall:  $M = {}_{\mathbb{C}G}\mathbb{C}G$ .

Sei  $\chi_M$  zugehöriger Charakter.

$$\chi_M(g) = |\{x \in G \mid gx = x\}| = \begin{cases} 0 & \text{für } g \neq 1 \\ |G| & \text{für } g = 1 \end{cases}$$

iii) Sei  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  Charakter zum  $\mathbb{C}G$ -Modul  $M$ .

$\chi(1) = \dim_{\mathbb{C}} M$ .

Bezeichnung: Seien  $S_1, S_2, \dots, S_r$  die verschiedenen irreduziblen  $\mathbb{C}G$ -Moduln, wobei  $S_1$  der triviale  $\mathbb{C}G$ -Modul ist. Wir bezeichnen den Charakter  $\chi_{S_i}$  des  $i$ -ten  $\mathbb{C}G$ -Modules mit  $\chi_i$  ( $i = 1, \dots, r$ )

$\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ .

Die  $\chi_i$  heißen irreduzible Charaktere.

Sei  $f_i = \dim_{\mathbb{C}} S_i : \mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^r M_{f_i \times f_i}(\mathbb{C})$

Bemerkung: Ist  $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$  (z.Bsp.  $S_1$ ), so spricht man von einem linearen Charakter, denn  $\chi_M : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  ist Gruppenhomomorphismus.

6.1.4 Satz: Sei  $U \in {}_{\mathbb{C}G}\text{mod}, \rho : G \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(U) \subseteq \text{End}_{\mathbb{C}}(U)$  zugehörige Darstellung. Sei  $g \in G, |g| = n$ .

Dann gilt:

- i)  $\rho(g) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(U)$  ist diagonalisierbar
- ii)  $\chi_U(g) =$  Summe (mit Vielfachheiten) der Eigenwerte von  $\rho(g)$  (LAAG 2: Jordansche NF)
- iii)  $\chi_U(g) =$  Summe von  $\chi_U(1) = \dim_{\mathbb{C}} U$  vielen  $n$ -ten Einheitswurzeln.
- iv)  $\chi_U(g^{-1}) = \overline{\chi_U(g)}$
- v)  $|\chi_U(g)| = \sqrt{\chi_U(g)\overline{\chi_U(g)}} \leq \chi_U(1)$
- vi)  $\{g \in G \mid \chi_U(x) = \chi_U(1) = \dim_{\mathbb{C}} U\} \trianglelefteq G$ .

Beweis:

- i)  $g^n = 1 \Rightarrow (\rho(g))^n = \text{id}_U \rightsquigarrow E_{\dim_{\mathbb{C}}(U)} \Rightarrow \rho(g)$  genügt dem Polynom  $x^n - 1 \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow$  Minimalpolynom  $\mu_{\rho(g)}(t)$  hat nur einfache Nullstellen  $\Rightarrow \rho(g)$  ist diagonalisierbar.
- ii) Folgt aus i)
- iii) Folgt aus i)
- iv) Jeder Eigenvektor von  $\rho(g)$  zu einem Eigenwert  $z \in \mathbb{C}$  ist Eigenvektor von  $\rho(g^{-1})$  zum Eigenwert  $z^{-1} \in \mathbb{C}$ :  
 $\rho(g)v = zv \Rightarrow z^{-1}v = (\rho(g)^{-1})(v) = \rho(g^{-1})(v), z\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = z^{-1}$   
 $\chi_{\rho}(g) = \sum \text{Einheitswurzeln}, \chi_{\rho^{-1}} = \sum \overline{\text{Einheitswurzeln}} = \overline{\sum \text{Einheitswurzeln}} = \overline{\chi_U(g)}$   
 $|\chi_U(g)| = \left| \sum_{\dim_{\mathbb{C}} U} \text{Eigenwerte } h \right| \stackrel{\text{Dreiecks-Ugl.}}{\leq} \sum_{\dim_{\mathbb{C}}(U)} |\text{Eigenwert } h| = \dim_{\mathbb{C}} U = \chi_U(1)$ .
- vi)  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = \lambda z_2 \exists \lambda \in \mathbb{R}^+$
- v)  $\Rightarrow |\chi_U(g)| = \chi_U(1) \Leftrightarrow$  alle Eigenwerte von  $\rho(g)$  sind 1  $\Leftrightarrow \rho(g) = \text{id}_U \Leftrightarrow g \in \ker \rho_U \trianglelefteq G$ .  
 $\rho_U : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(U)$

Erinnerung:  $\mathbb{C}^G = \{\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}\}$  ist  $\mathbb{C}$ -Algebra mit Addition  $(\alpha_1 + \alpha_2)(g) = \alpha_1(g) + \alpha_2(g), (\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g) = \alpha_1(g) \cdot \alpha_2(g)$  und  $(\lambda\alpha)(g) = \lambda(\alpha(g))$ .

Menge Der Charaktere von  $G \subseteq \mathbb{C}^G$ .

6.1.5 Lemma:  $(\chi_1, \dots, \chi_r)$  ist linear unabhängig in dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}^G$ .

Beweis:  $\mathbb{C}G \cong M_{f_1 \times f_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{f_r \times f_r}(\mathbb{C})$ ,  $S_i$  = der eindeutig bestimmte irreduzible  $G$ -Modul im Block  $M_{f_i \times f_i}(\mathbb{C})$ .

Sei  $e_i$  = Einselement von  $M_{f_i \times f_i}(\mathbb{C})$  (also  $e_i = ((0)_{f_1 \times f_1}, \dots, (0)_{f_{i-1} \times f_{i-1}}, (1)_{f_i \times f_i}, (0) \dots)$ )  
Idemp. von  $\mathbb{C}G$ .

Seien  $\chi_1, \dots, \chi_r$  die zu  $S_i$  gehörenden Charaktere von  $G$ .

Wir können  $\chi_i$  linear zu einer lineare Abbildung von  $\mathbb{C}G$  nach  $\mathbb{C}$  ausdehnen:  $\chi_i \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}) = \mathbb{C}G^*$ , d.h. für  $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{C}G$  ist  $\chi_i(a) = \sum_{g \in G} \alpha_g \chi_i(g) \in \mathbb{C}$ .

Beachte: Auf  $S_i$  operiert  $e_i$  wie die Eins. D.h.  $\chi_i(e_i) = \dim_{\mathbb{C}}(S_i) = f_i$  und  $\chi_j(e_i) = 0$  für  $i \neq j$ .

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  so, dass  $\sum_{j=1}^r \lambda_j \chi_j = 0$  ist. Dann ist für  $1 \leq i \leq r$ :  $0 = \sum_{j=1}^r \lambda_j \chi_j(e_i) = \lambda_i \chi_i(e_i) \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i$ . Also sind  $(\chi_1, \dots, \chi_r)$  linear unabhängig.

6.1.6 Lemma:  $U, V \in \mathbb{C}G\text{mod}$  endlich erzeugt. Dann  $\chi_{U \oplus V} = \chi_U + \chi_V$

Beweis: Trivial. ( $\rho_{U \oplus V}(g)$  hat Blockdiagonalform. Spur nehmen  $\Rightarrow$  Behauptung.)

Beachte: Sind  $g, h \in G$  konjugiert,  $\chi$  Charakter von  $G \Rightarrow \chi(g) = \chi(h)$ , denn  $g, h$  konjugiert  $\Rightarrow \exists x \in G : g = xhx^{-1} \Rightarrow \chi(g) = \chi(xhx^{-1}) = \chi((hx^{-1})x) = \chi(h)$ , d.h.  $\chi$  ist konstant auf Konjugationsklassen von  $G$ .

Abbildung  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\alpha \in \mathbb{C}^G$ ) heißen Klassenfunktionen, wenn  $\alpha(g) = \alpha(h)$  falls  $g, h$  konjugiert sind.

Wir haben gezeigt:  $\chi_1, \dots, \chi_r$  sind  $r$  viele linear unabhängig Klassenfunktionen in  $\mathbb{C}^G$ .

Definiere:  $C_1, \dots, C_r$  seien die Konjugationsklassen auf  $G$ . Für  $1 \leq i \leq r$  sei  $\epsilon_i : g \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } g \in C_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Klar:  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_r\}$  linear unabhängig in der Unter algebra der Klassenfunktionen.

Sei  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$  Klassenfunktion, mit  $\alpha(g) = \alpha_i \in \mathbb{C}$  für  $g \in C_i \Rightarrow \alpha = \alpha_1 \epsilon_1 + \dots + \alpha_r \epsilon_r$

Folgerung:  $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  ist Basis der  $\mathbb{C}$ -Algebra der Klassenfunktionen auf  $G$ .

Bemerkung: Sei  $M \in \mathbb{C}G\text{mod}$  endlich erzeugt  $\Rightarrow \exists \nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbb{N}_0$  so, dass  $M = S_1^{\oplus \nu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \nu_r} \Rightarrow \chi_M = \nu_1 \chi_1 + \dots + \nu_r \chi_r$ .

Es gilt: Ist  $M \not\cong N$  und  $M, N \in \mathbb{C}G\text{mod}$  endlich erzeugt  $\Rightarrow \chi_M \neq \chi_N$ .

6.1.7 Satz: Zwei endliche erzeugte  $\mathbb{C}G$ -Moduln sind isomorph  $\Leftrightarrow$  ihre Charakter stimmen überein.

Beweis: Sind  $S_1, \dots, S_r$  die verschiedenen irreduziblen  $\mathbb{C}G$ -Moduln mit Charakteren  $\chi_1, \dots, \chi_r$ ,  $M, N \in$

$\mathbb{C}G\text{-mod}$ . Sei  $M = S_1^{\oplus \mu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \mu_r}$ ,  $N = S_1^{\oplus \nu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \nu_r}$ , so ist  $\chi_M = \sum_{i=1}^r \mu_i \chi_i$ ,  $\chi_N = \sum_{i=1}^r \nu_i \chi_i$   
 $M \cong N \Leftrightarrow \mu_i = \nu_i \forall i = 1, \dots, r \Leftrightarrow \chi_M = \chi_N$   $\square$

Bemerkung: Es gibt keinen kanonischen Weg, aus dem Charakter eines  $\mathbb{C}G$ -Moduls  $M$  den Modul  $M$  selbst zu bestimmen.

Erinnerung:  $U, V \in \mathbb{C}G\text{-mod} \Rightarrow U \otimes_{\mathbb{C}} V, \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V), U^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, \mathbb{C})$  sind  $\mathbb{C}G$ -Moduln.

6.1.8 Satz:  $U, V \in \mathbb{C}G\text{-mod}$ . Dann gilt:

i)  $\chi_{U \times V} = \chi_U \cdot \chi_V$  ( $\chi_{U \otimes V}(g) = \chi_U(g) \cdot \chi_V(g)$ )

ii)  $\chi_{U^*} = \overline{\chi_U}$  ( $\chi_{U^*}(g) = \overline{\chi_U(g)}$ )

iii)  $\chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)} = \overline{\chi_U} \cdot \chi_V$

Beweis:

i) Sei  $g \in G$ . Sei  $(u_1, \dots, u_m)$  und  $(v_1, \dots, v_n)$  Basen von  $U$  bzw.  $V$  aus Eigenvektoren von  $g$  auf  $U$  bzw.  $V$ . D.h.  $\exists \mu_1, \dots, \mu_m, \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{C} : gu_i = \mu_i u_i$  und  $gv_j = \nu_j v_j \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

Dies geht nach 6.1.4, da die Operation von  $G$  auf  $U$  bzw.  $V$  diagonalisierbar ist.

LAAG: Die  $(u_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$  ist Basis von  $U \otimes V$

$$g(u_i \otimes v_j) = (gu_i) \otimes (gv_j) = (\mu_i u_i) \otimes (\nu_j v_j) = \mu_i \nu_j (u_i \otimes v_j)$$

$$\text{Es folgt: } \chi_{U \otimes V}(g) = \sum_{i,j} \mu_i \nu_j = \left( \sum_{i=1}^m \mu_i \right) \left( \sum_{j=1}^n \nu_j \right) = \chi_U(g) \chi_V(g)$$

ii)  $g \in G, (u_1, \dots, u_m)$  Basis aus Eigenvektoren von  $g$  auf  $U, gu_i = \mu_i u_i, \mu_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq m$ .

Sei  $(u_1^*, \dots, u_m^*)$  Basis von  $U^*$ , d.h.  $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ .  $\Rightarrow (gu_i^*)(u_j) = u_i^*(g^{-1}u_j) \stackrel{6.1.4}{=} u_i^*(\mu_j u_j) = \overline{\mu_j} \delta_{ij}$

$\Rightarrow gu_i^* = \overline{\mu_i} u_i^*$ , d.h.  $u_i^*$  ist Eigenvektor von Operation von  $g$  auf  $U^*$  mit Eigenwerten  $\overline{\mu_i}$ .

$$\text{Also ist } \chi_{U^*}(g) = \sum_{i=1}^m \overline{\mu_i} = \sum_{i=1}^m \mu_i = \overline{\chi_U(g)}.$$

iii) Nach 5.3.4 (?) ist  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \cong U^* \otimes V$  als  $\mathbb{C}G$ -Modul. Die Behauptung folgt aus i) und ii).  $\square$

Bemerkung:  $\{\text{char von } G\} \subseteq \mathbb{C}^G = \mathbb{C}$ -Algebra und darin sind die irreduziblen Charaktere  $(\chi_1, \dots, \chi_r)$  linear unabhängig. So ist  $\langle \chi_1, \dots, \chi_r \rangle_{\mathbb{C}\text{-Aufspann}}$   $r$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{C}^G$ .

Abelsche Gruppe, freier  $\mathbb{Z}$ -Modul:  $\left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i \chi_i \mid \mu_i \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \langle \chi_1, \dots, \chi_r \rangle$ .

Klassenfunktionen der Form  $\sum_{i=1}^r \mu_i \chi_i$  mit  $\mu_i \in \mathbb{Z}$  heißen „virtuelle“ Charaktere.

6.1.9 Korollar: Der Raum der virtuellen Charaktere ist ein Ring.

Beweis: Nach 6.1.8 ist das Produkt zweier Charaktere wieder ein Charakter, d.h. ganzzahlige Linearkombination der  $\chi_1, \dots, \chi_r$ . Also ist auch das Produkt zweier virtueller Charaktere wieder ein virtueller Charakter.  $\square$

Definition: Eine Klassenfunktion auf  $G$  ist eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(g) = f(h)$  falls  $g, h$  konjugiert (also  $g \sim_G h$ ).

Klar: Summe, lineare Vielfache und Produkte von Klassenfunktionen sind Klassenfunktionen.

Also:  $\langle \chi_1, \dots, \chi_r \rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \{\text{Klassenfunktionen auf } G\} \subseteq \mathbb{C}^G$

6.1.10  $\langle \chi_1, \dots, \chi_r \rangle_{\mathbb{C}}$  ist die  $\mathbb{C}$ -Algebra der Klassenfunktionen auf  $G$ .

Beweis: Seien  $C_1, \dots, C_r$  die Konjugationsklassen von  $G$ ,  $1 \leq i, j \leq r$ . Sei  $\psi_i : G \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch:

$$\psi_i(g) = \begin{cases} 1 & \text{für } g \in C_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  Klassenfunktion mit  $f(g) = \lambda_i$  für  $g \in C_i \Rightarrow f = \sum_{i=1}^r \lambda_i \psi_i \Rightarrow f \in \langle \psi_1, \dots, \psi_r \rangle_{\mathbb{C}}$

$\psi_1, \dots, \psi_r >_{\mathbb{C}}$

Trivial:  $\psi_1, \dots, \psi_r$  linear unabhängig  $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \{\text{Klassenfunktionen auf } G\} = r$

$\Rightarrow$  Behauptung.  $\square$

Definition:  $\text{Cl}(G) := \mathbb{C}$ -Vektorraum der Klassenfunktionen auf  $G$ .

Auf  $\text{Cl}(G)$  definieren wir ein inneres Produkt  $(\cdot, \cdot)$  durch:  $(\alpha, \beta \in \text{Cl}(G))$

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} \in \mathbb{C}$$

Wir haben:

$$(\alpha, \alpha) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\alpha(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\alpha(g)|^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(g) = 0 \forall g \in G \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\beta(g) \alpha(g)} = \overline{(\beta, \alpha)}$$

$$(\lambda \alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\lambda \alpha)(g) \overline{\beta(g)} = \frac{\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{(\overline{\lambda} \beta)(g)} = (\alpha, \overline{\lambda} \beta)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\alpha_1 + \alpha_2)(g) \overline{\beta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_1(g) \overline{\beta(g)} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha_2(g) \overline{\beta(g)} = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta).$$

Also ist  $(\cdot, \cdot)$  wirklich ein Skalarprodukt auf  $\text{Cl}(G)$ .

Erinnerung:  $U \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  endlich erzeugt. Dann ist  $U^G = \{u \in U \mid gu = u \forall g \in G\}$  ist der eindeutig bestimmte größte Untermodul von  $U$ , auf dem  $G$  trivial operiert.

$U = S_1^{\oplus \mu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \mu_r}$ ,  $S_1$  = trivialer  $\mathbb{C}G$ -Modul.

$\Rightarrow U^G = S_1^{\oplus \mu_1}$ ,  $\mu_1 = \dim_{\mathbb{C}} U^G$

Beobachtung:  $U^G =$  simultae Eigenraum  $\forall g \in G$  zum Eigenwert  $1 = \bigcap_{g \in G}$  Eigenraum von  $g$  zum Eigenwert 1.

6.1.11 Lemma: Sei  $U \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  endlich erzeugt, dann ist  $\dim_{\mathbb{C}} U^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_U(g) (= \chi_U(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g = \chi_U(T))$ .

Beweis: Sei  $a = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}G$ . Sei  $h \in G \Rightarrow ha = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g = a = ah$

$\Rightarrow a^2 = (\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g)a = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (ga) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a = a$ ,  $a$  ist Idempotent von  $\mathbb{C}G$ .

$(\mathbb{C}G = M_{1 \times 1}(\mathbb{C}) \oplus M_{f_2 \times f_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{f_r \times f_r}(\mathbb{C}); a = (1, 0, \dots, 0)$ .

Sei  $\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(U)$  die zu  $U \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  gehörende Darstellung von  $\mathbb{C}G$  und sei  $T = \rho(a)$ . Dann gilt  $T^2 = (\rho(a))^2 = \rho(a^2) = \rho(a) = T$ , d.h.  $T$  erfüllt das Polynom  $X^2 - X \in \mathbb{C}[X] \Rightarrow 0$  und 1 sind die einzigen möglichen Eigenwerte von  $T$  und  $T$  ist diagonalisierbar.

Sei  $U_1 \subseteq U$  der Eigenraum von  $T$  zum Eigenwert 1.

$u \in U_1 \Rightarrow g(u) = g(a \cdot u) = (ga)(u) = au = u$

$\Rightarrow U_1 \leq U^G$

Sei  $u \in U^G$ , dann ist  $|G|au = (\sum_{g \in G} g)u = \sum_{g \in G} (gu) = \sum_{g \in G} u = |G|u \Rightarrow au = u \Rightarrow u \in U_1$

Also ist  $U_1 = U^G$ . Die Spur  $\text{tr}(T)$  von  $T$  auf  $U$  ist  $\dim_{\mathbb{C}}(U_1)$

6.1.12 Erinnerung: Sind  $U, V \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  endlich erzeugt. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) = U^* \otimes V \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  und es ist  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V) = (\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, v))^G$ .

6.1.13 Korollar: Seien  $U, v \in \mathbb{C}G\text{-mod}$ . Dann ist  $(\chi_V, \chi_U) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V)$

Beweis:  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(U, V) \stackrel{6.1.12}{=} \dim_{\mathbb{C}} (\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V))^G \stackrel{6.1.11}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V)}(g)$

$\stackrel{6.1.8}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\overline{\chi_U(g)} \chi_V(g)) = (\chi_V, \chi_U)$  □

Bemerkung:  $\text{Hom}_{\mathbb{C}G}(S_1^{\oplus \nu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \nu_r}, S_1^{\oplus \mu_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus \mu_r}) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(S_i^{\oplus \nu_i}, S_i^{\oplus \mu_i}) \cong M_{\mu_i \times \nu_i}(\mathbb{C})$

$\dim = \sum \mu_i \nu_i$

6.1.14 Korollar:  $\chi_1, \dots, \chi_r$  ist eine Orthonormalbasis von  $\text{Cl}(G)$ . Beweis: 6.1.13 impliziert, dass  $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$ . □

## 2. Charaktertafel

$G =$  Gruppe,  $|G| = n < \infty$ ,  $\text{Irr}(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_r\} =$  irreduzible Charakter von  $G$ ,  $\chi_1$  trivialer Charakter.

Fakten:

- 1) Jeder Charakter von  $G$  ist  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der  $\chi_i$
- 2) Jeder Charakter von  $G$  ist vollständig bestimmt durch seine Werte auf den Konjugationsklassen von  $G$ .
- 3) Die Anzahl der Konjugationsklassen von  $G = r$ .
- 4) Sind  $C_1 \ni 1, \dots, C_r$  die Konjugationsklassen von  $G$ ,  $g_i \in C_i$ , so ist  $|C_i| = k_i = |G : C_G(g_i)|$  (1.3.13)
- 5)  $\text{Irr}(G)$  ist ONB vom  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Klassenfunktionen  $\text{Cl}(G)$  bezüglich des Skalarprodukts  $(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^r k_i \alpha(g_i) \overline{\beta(g_i)} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{|C_G(g_i)|} \alpha(g_i) \overline{\beta(g_i)}$

Definition: Charaktertafel von  $G$  ist eine  $r \times r$ -Matrix mit  $\chi_i(g_j)$  als  $ij$ -Eintrag.  
Spaltenlabel:  $g_i^{k_i}$ , Zeilenlabel:  $\chi_i$  (Atlas Notation)

$\chi_1(g_i) = 1, \chi_i(g_1) = f_i = \text{Grad von } \chi_i = \text{Dimension der zugehörigen Darstellungen} = \text{Größe des dazugehörigen Blocks von } \mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^r M_{f_i \times f_i}(\mathbb{C})$

6.1.14 übersetzt sich in:

6.2.1 Korrolar:  $\delta_{ij} = \sum_{t=1}^r \frac{1}{|C_G(g_t)|} \chi_i(g_t) \overline{\chi_j(g_t)}$

Zeilen Der Charaktertafel sind orthonormal bezüglich es Standardskalarprodukt gewichtet mit  $\frac{1}{|C_G(g_t)|}$  auf  $\mathbb{C}^r$ .

6.2.2 Korrolar: Seien  $\alpha = \sum \lambda_i \chi_i, \beta = \sum \mu_j \chi_j$  virtuelle Charaktere.

Dann ist  $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mu_i$

6.2.3 Korrolar: Sei  $\alpha$  virtueller Charakter (Klassenfunktion) von  $G$ . Dann ist  $\alpha = \sum_{i=1}^r (\alpha, \chi_i) \chi_i$

Insbesondere ist  $\alpha$  Charakter von  $G \Leftrightarrow (\alpha, \chi_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $\neq 0$  für mindestens ein  $i$ .

Sofort: Ist  $\chi$  ein Charakter von  $G$ , so ist  $\chi$  irreduzibel  $\Leftrightarrow (\chi, \chi) = 1$ , also genau ein  $\lambda_i = 1$  und der Rest 0.

6.2.4 Satz: Sei  $\alpha$  linearer Charakter (i.e.  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  Homomorphismus) mit zugehörigem  $\mathbb{C}G$ -Modul  $M$  ( $M \cong \mathbb{C}$  als Vektorraum,  $g \cdot m = \alpha(g) \cdot m$ ).

Sei  $X \in \mathbb{C}G\text{-mod}$  mit Charakter  $\chi$ . Dann ist  $\alpha\chi$  ebenfalls Charakter von  $G$  (mit Modul  $M \otimes_{\mathbb{C}} X$ ), und  $\alpha\chi$  ist irreduzibel!

Beweis:  $\alpha$  irreduzibel  $\Rightarrow \alpha(g)$  Einheitswurzel  $\forall g \in G$  da  $1 = |\alpha(g)| = \alpha(g)\overline{\alpha(g)} \forall g \in G$ .

$$(\alpha\chi, \alpha\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi(g)\overline{\alpha(g)\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)}\alpha(g)\overline{\alpha(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = (\chi, \chi) = 1 \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

Korrolar: Sei  $\alpha$  Charakter von  $G$ ,  $(\alpha, \alpha) = n \in \{1, 2, 3\}$ . Dann ist  $\alpha$  Summe von  $n$  irreduziblen Charakteren.

6.2.5 Satz: (Spaltenorthogonalität):  $\sum_{t=1}^n \chi_t(g_i)\overline{\chi_t(g_j)} = \frac{|G|}{k_i} \delta_{ij} = |C_G(g_i)|\delta_{ij}$ .

Beweis: Sei  $X = (\chi_i(g_j))_{ij}$  Charaktertafeln von  $G$ ,  $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_r) \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ .

Dann ist  $ij$ -Eintrag von  $X \cdot K = \chi_i(g_j) \cdot k_j$  und wir erhalten als  $ij$ -Eintrag von  $XKX^t$  den

$$\text{Wert } \sum_{l=1}^r \chi_i(g_l)k_l\overline{\chi_j(g_l)} = \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} = |G|(\chi_i, \chi_j) = |G|\delta_{ij}.$$

Also ist  $XK\overline{X}^t = |G|E_{r \times r}$ .

Allgemein:  $A, B \in M_{r \times r}(K)$ ,  $A \cdot B = \lambda E_{r \times r}$ ,  $0 \neq \lambda \in K \Rightarrow B = A^{-1}\lambda E = \lambda A^{-1}$ ,  $BA = AB = \lambda E$

Also  $K\overline{X}^t X = |G|E_{r \times r}$ ,  $(K\overline{X}^t X)_{ij} = \sum_{l=1}^r k_j \overline{\chi_l(g_j)} \chi_l(g_i) = |G|\delta_{ij}$  □.

$K$  = Körper,  $N \trianglelefteq G$ ,  $\eta : G \rightarrow G/N : g \mapsto gN$  natürliche Projektion,  $g_1, \dots, g_s$  Nebenklassenvertreter von  $N$  in  $G$ .

Definiere  $\hat{\eta} : KG \rightarrow KG/N : \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \sum_{g \in G} \lambda_g gN = \sum_{i=1}^s (\sum_{h \in g_i N} \lambda_h) g_i N$

Leichte Übung:  $\hat{\eta}$  ist multiplikativ, d.h. ein  $K$ -Algebraepimorphismus ( $\ker \hat{\eta} = \langle h - 1 \mid h \in N \rangle_{\text{Ideal}}$ )

Damit kann jeder  $KG/N$ -Modul zu einem  $KG$ -Modul gemacht werden.

Fast allgemein: Sei  $A$  eine Algebra,  $I \trianglelefteq A$  Ideal,  $B = A/I$ ,  $M \in {}_B\text{mod}$ .

Dann wird  $M$  zum  $A$ -Modul durch  $a \cdot m := (a + I)m \forall a \in A, m \in M$ .

Richtig allgemein:  $A, B$  seien  $\Lambda$ -Algebren,  $f : A \rightarrow B$  Algebromorphismus,  $M \in {}_B\text{mod}$ .

Dann wird  $M$  zum  $A$ -Modul durch  $a \cdot m := f(a)m \forall a \in A, m \in M$ .

Sind  $M, N \in {}_B\text{mod}$ ,  $\beta : M \rightarrow N$  ist  $B$ -linear, so ist  $\beta$  auch  $A$ -linear.

Also ist die Abbildung, die jedem  $B$ -Modul dem entsprechenden  $A$ -Modul zuordnet, ein Funktor, genannt „Inflation“ entlang  $f$ .

$\text{Inf}_{B,f}^A : A \rightarrow B \rightarrow \text{End}_{\Lambda}(M)$

Sei  $\chi$  Charakter von  $G$ ,  $K_{\chi} = \{x \in G \mid \chi(x) = \chi(1)\}$  der Kern von  $\chi$ . (6.1.4)

Dann ist  $K_{\chi} \trianglelefteq G$ . Für  $\chi = \chi_i$  schreiben wir jetzt  $K_i$  anstatt  $K_{\chi_i}$ .

6.2.6 Satz: Sei  $N \trianglelefteq G$ , dann gibt es eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, r\}$  so, dass  $N = \bigcap_{i \in I} K_i$  ist.



Also: Die Normalteiler von  $G$  sind exakt alle möglichen Schnitte der Kerne der irreduziblen Charakteren!

Beweis:  $U = \mathbb{C}(G/N)$ ,  $\psi = \text{Charakter } {}_{\mathbb{C}U}U$  und  $\chi$  sei der entsprechende Charakter von  $G$ .  
 $(g(hN) = (gh)N)$

Sei  $g \in G$ : Dann ist  $\chi(g) = \psi(gN) = \begin{cases} \psi(1) = |G/N| = \dim_{\mathbb{C}} U = \chi(1) & \text{für } g \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ , d.h.

$N = K_{\chi}$ .

$(|K_i| = | \bigcup_{\chi_i(g_j)=\chi_i(1)} g_j^G | = \sum_{\chi_r(s_i)=\chi_r(1)} k_i)$  Sei  $\chi = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_i$ , 6.1.4  $\Rightarrow |\chi(g)| \leq \sum a_i |\chi_i(g)| \leq$

$\sum \alpha_i |\chi_i(1)| = \chi(1) \forall g \in G$ .

$\sum \alpha_i \chi_i(g) = \chi(g) = \chi(1) = \sum \alpha_i \chi_i(1)$ , also  $\chi(g) = \chi(1) \Leftrightarrow (\chi_i(g) = \chi_i(1) \text{ oder } \alpha_i = 0) \forall i$

Sei  $I = \{1 \leq i \leq r \mid \alpha_i \neq 0\}$

Also ist  $N = \bigcap_{i \in I} K_i$

6.2.7 Korrolar:  $G$  einfach  $\Leftrightarrow \forall 1 \neq g \in G \forall 2 \leq i \leq r : \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$

6.2.8 Korrolar: Charaktertafel löst die Frage, ob  $G$  auflösbar oder nicht auflösbar ist.

Definition: Sei  $\chi$  Charakter von  $G$ .  $Z_{\chi} = \{x \in G \mid |\chi(X)| = \chi(1)\} \supseteq K_{\chi}$

6.2.9 Lemma:  $Z_x \leq G$ . Ist  $\chi = \chi_i$  irreduzibel, so ist  $Z_{\chi}/K_{\chi} = Z(G/K_{\chi})$

6.2.10 Korrolar: Ist  $G$  nicht abelsch und einfach, dann ist  $Z_i = Z_{\chi_i} = (1)$  für  $i = 2, \dots, r$ .

6.2.11 Satz:  $Z(G) = \bigcap_{i=1}^r Z_i, Z_i = Z_{\chi_i}$

6.2.12 Satz: Sei  $N \trianglelefteq G$ . Dann können die irreduziblen Charaktere von  $G/N$  aus denen von  $G$  ausgerechnet werden.

Beweis: Jeder irreduzible  $G/N$ -Modul ist durch Inflation irreduzibler  $G$ -Modul.

$(M \in {}_{K(G/N)}\text{mod irreduzibel} \Leftrightarrow \forall 0 \neq m \in M : K(G/N)m = M \Leftrightarrow M \in {}_{KG}\text{mod irreduzibel})$

So ist  $\text{Irr}_K(G/N) = \{\chi_i \mid \chi_i(n) = \chi_i(1) \forall n \in N\}$

Vorsicht: Man kann aus Charaktertafel von  $G$  nicht die Größe der Konjugationsklassen von  $G/N$  ablesen.

Klar: Sei  $g \in N, C = g^G \Rightarrow \{hN \mid h \in C\}$  ist Konjugationsklasse von  $G/N$ .

6.2.13 Korrolar: Man kann aus der Charaktertafel von  $G$  direkt ablesen, ob  $G$  nilpotent ist oder nicht.

# VII. Exkurs in die Kategorientheorie

## 1. Kategorien

1.1.1 Definition: Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  besteht aus

- (1) Einer Klasse  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  von Objekten von  $\mathcal{C}$  ( $A, B, C, \dots$ )
- (2) Für  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  eine Menge  $\mathcal{C}(A, B)$  von Morphismen von  $A$  nach  $B$ .
- (3) Für  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  eine Kompositionsregel  $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C) : (f, g) \mapsto f \circ g = fg$ , so dass gilt:

$$\text{K1: } \mathcal{C}(A_1, B_1) \cap \mathcal{C}(A_2, B_2) \neq \emptyset \Rightarrow A_1 = A_2 \text{ und } B_1 = B_2$$

$$\text{K2: } A, B, C, D \in \text{Obj}(\mathcal{C}), f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C), h \in \mathcal{C}(C, D) : f(gh) = (fg)h$$

$$\text{K3: } \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \text{ gibt es ein } 1_A \in \mathcal{C}(A, A) \text{ mit } 1_A f = f, g 1_A = g \forall B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \text{ und } f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(C, A) \\ (\text{Automitat: } 1_A \text{ ist eindeutig})$$

1.1.2 Beispiele:

- 1.)  $\mathcal{S}$  = Kategorie der Mengen
- 2.)  $\mathcal{T}$  = Kategorie der topologischen Räume, Morphismen = stetige Abbildungen ( $\mathcal{T}_1$  = Kategorie der punktierten topologischen Räume)
- 3.)  $G$  = Kategorie der Gruppen, Morphismen = Gruppenhomomorphismen
- 4.)  $Ab$  = Kategorie der abelschen Gruppen
- 5.)  $K$  = Korper,  $V_K$  = Kategorie der  $K$ -Vektorräume, Morphismen =  $K$ -lineare Abbildungen

6.)  $\mathcal{R}$  = Kategorie der Ringe

7.)  $\mathcal{R}_1$  = Kategorie der Ringe mit Einselement.

8.)  $\Lambda$  = Ring  $\ni 1$  (oder Algebra),  ${}_A\text{mod}$  und  $\text{mod}_A$  sind Kategorien

9.)  $(M, \leq)$  geordnete Menge: Bilde Kategorie  $\mathcal{M}$  mit

a)  $\text{Obj}(cM) = M$  (also ist  $cM$  „klein“, d.h.  $\text{Obj}(cM)$  ist eine Menge)

b)  $m, n \in M$  bestehe aus  $cM(m, n)$  aus genau einem Element wenn  $m \leq n$ , sonst sei  $\mathcal{M}(m, n) = \emptyset$

10.)  $L$  = Ring  $\ni 1$ ,  $\mathcal{L}$  = Kategorie mit  $\text{Obj}(\mathcal{L}) = \{L\}$ ,  $\mathcal{L}(L, L) = L$ ,  $(a, b) \mapsto ab \in L$

11.) Sei  $A$  = Algebra  $\ni 1$ , bilde Kategorie der Kettenkomplexe  $\mathcal{K}(A)$ ,  $\text{Obj}(\mathcal{K}(A))$  bestehen aus Komplexen  $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \rightarrow \dots \rightarrow M_i \rightarrow \dots$  aus  $A$ -Moduln  $M_i \in {}_A\text{mod}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) und  $A$ -Modulhomomorphismen  $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  so, dass  $f_{i+1}f_i = 0$  ist, d.h.  $\text{im } f_i \subseteq \ker f_{i+1}$   
Morphismen von:

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & \dots \\ \alpha_1 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_3 \downarrow & & \dots \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

sind Folgen von  $A$ -Modulhomomorphismen  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  so, dass alle Diagramme kommutieren, i.e.  $\alpha_{i+1}f_i = g_i\alpha_i$

12.)  $\mathcal{T}_h$  = Kategorie der topologischen Räume, mit Morphismen = Homotopieklassen stetiger Abbildungen

Definition:  $\mathcal{C}$  = Kategorie,  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $f : A \rightarrow B$  Morphismus.  $f$  heißt invertierbar (Isomorphismus), falls es ein  $g : B \rightarrow A$  gibt mit  $gf = 1_B$  und  $fg = 1_A$ .

Notation:  $g = f^{-1}$

Klar:  $f^{-1}$  ist eindeutig bestimmt,  $f, g$  invertierbar  $\Rightarrow (f \circ g)$  invertierbar und  $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$A \cong B$  falls ein Isomorphismus  $f : A \rightarrow B$  existiert.

Definition:  $\mathcal{C}$  Kategorie. Eine Teilklasse  $\text{Obj}(\mathcal{U})$  von  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  mit Morphismenmengen  $\mathcal{U}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$  für  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Obj}(\mathcal{C})$  heißt Unterkategorie, falls  $1_a \in \mathcal{U}(A, A) \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{U})$ , und  $fg \in \mathcal{U}(A, C) \forall f \in \mathcal{U}(A, B), g \in \mathcal{U}(B, C)$ .

$\mathcal{U}$  heißt volle Unterkategorie falls  $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{C}(A, B) \forall A, B \in \text{Obj}(\mathcal{U})$

Beispiel:

- i) Die Kategorie der  ${}_A\underline{\text{mod}}$  ist volle Unterkategorie von  ${}_A\text{mod}$ .
- ii) Sei  $\mathcal{C}$  Kategorie. Isomorph zu sein ist Äquivalenzrelation auf  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ .  
 Wähle aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Objekt aus.  
 $\mathcal{S}(\mathcal{C}) =$  volle Unterkategorie von  $\mathcal{C}$  mit  $\text{Obj}(\mathcal{S}) =$  Vertreter von Isomorphieklassen von  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  („Skelett von  $\mathcal{C}$ “)  
 Oft  $\mathcal{S}(\mathcal{C})$  ist kleine Kategorie, etwa für  $\mathcal{C} = {}_A\text{mod}$
- iii)  $\mathcal{R}_1$  ist keine volle Unterkategorie von  $\mathcal{R}$ .

## 2. Funktoren

Funktoren = „Morphishmen von Kategorien“

Definition: Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein kovarianter Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  besteht aus einer Abbildung  $F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$  zusammen mit Abbildungen  $F_{x,y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(X), F(Y))$  für alle  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  so dass gilt:

$$F1: \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}) : F_{X,X}(1_X) = 1_{F(X)}$$

$$F2: \text{für } f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C) \text{ ist } F_{A,C}(fg) = F_{A,B}(f)F_{B,C}(g).$$

Beispiele:

1. Vergissfunktoren:

$V : \text{Ab} \rightarrow \mathcal{S} : \text{abelsche Gruppe} \mapsto \text{Menge, Homomorphismus} \mapsto \text{Abbildung.}$

$V : V_K \rightarrow \text{Ab} : K\text{-Algebra } A, V : {}_A\text{mod} \rightarrow V_K$

2. Die Einbettung einer Unterkategorie  $U$  von  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}$  ist Funktor.

3. Die Identität  $1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  ist Funktor.

4.  $A : G \rightarrow \text{Ab} : G \mapsto G/G', G' = [G, G]$  ( $f : G \rightarrow H$  Gruppenhomomorphismus  $\Rightarrow f(G') \subseteq H' \Rightarrow \exists A(f) = \hat{f} : G/G' \rightarrow H/H' : gG' \mapsto f(g)H'$ ).  $A =$  Abelisierungsfunktor.

5. Sei  $M$  Menge,  $\mathcal{F}(M)$  = freie abelsche Gruppe mit Basis  $M$ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{i_M} & \mathcal{F}(M) \\
 f \downarrow & \searrow i_N \circ f & \downarrow \widehat{i_N \circ f} \\
 N & \xrightarrow{i_N} & \mathcal{F}(N)
 \end{array}$$

mit  $\widehat{i_N \circ f \circ i_M} = i \circ f$  (universelle Eigenschaft von  $\mathcal{F}(M)$ ).

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{i_N \circ f}$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(M, N) \rightarrow \text{Ab}(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$$

Analog:  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow V_K$  = Kategorie der  $K$ -Vektorräume ( $K$  = Körper);  $\mathcal{F}$  ist Funktor von  $\mathcal{S}$  in  $\text{Ab}$  (bzw.  $V_K$ )

6. „Hom-Funktor“:  $\mathcal{C} = {}_A\text{mod}$  ( $A$  = Ring,  $K$ -Algebra,  $\Lambda$ -Algebra). Sei  $M \in {}_A\text{mod}$  fest gewählt,  $X \in {}_A\text{mod}$  beliebig. Dann ist  $\text{Hom}_A(M, X)$  abelsche Gruppe ( $K$ -Vektorraum,  $\Lambda$ -Modul) und  $\text{Hom}_A(M, -) : {}_A\text{mod} \rightarrow \text{Ab}(V_K, {}_A\text{mod}) : X \mapsto \text{Hom}_A(M, X)$  ist Abbildung.

Seien  $X, Y \in {}_A\text{mod}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  sei  $A$ -linear. Dann wird durch  $\text{Hom}_A(M, f) : \text{Hom}_A(M, X) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Y) : h \mapsto f \circ h$  (Homomorphismus von abelschen Gruppen ( $K$ -VR,  $\Lambda$ -Moduln))

$G := \text{Hom}_A(M, -)$  ist wirklich Funktor! Denn:

i)  $G(\text{id}_X) = \text{id}_{G(X)}$  ( $\text{Hom}_A(M, \text{id}_X) = \text{id}_{\text{Hom}_A(M, X)}$ )

ii) Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$   $A$ -linear. Zu zeigen:  $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$ .

$$\text{Also } \forall h \in G(X) : G(g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (G(f)(h)) = G(g)(G(f)(h)) = (G(g) \circ G(f))(h)$$

Also ist  $\text{Hom}_A(M, -)$  Funktor von  ${}_A\text{mod}$  nach  $\text{Ab}(V_K, {}_A\text{mod})$

Lemma: Seien  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  Kategorien.  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$  Funktoren. Dann wird durch

$$G \circ F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_3 : X \mapsto G(F(X)), f \mapsto G(F(f)) \quad \forall X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C}_1), f \in \mathcal{C}_1(X, Y)$$

ein Funktor von  $\mathcal{C}_1$  nach  $\mathcal{C}_3$  definiert.

Beweis: einfach

Definition:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt Isomorphismus, falls es einen Funktor  $G$  von  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt mit  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$ .

Also:  $X \in \mathcal{C}$ , so ist  $G(F(X)) = X$  usw.

Allgemeine Hom-Funktion:

$\mathcal{C}$  : Kategorie,  $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$

$\mathcal{C}(M, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} : X \mapsto \mathcal{C}(M, X), f \mapsto f \circ ?$  ( $f : X \rightarrow Y$ ) ist (w.o.) Funktor

$\mathcal{C}(-, M) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S} : X \mapsto \mathcal{C}(X, M), f \mapsto ? \circ f \quad (f : X \rightarrow Y)$   
 Es gilt  $\mathcal{C}(f \circ g, M) = \mathcal{C}(g, M) \circ \mathcal{C}(f, M)$ .

Ein kontravarianter Funktor von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist eine Abbildung  $F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$  und  $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(F(Y), F(X))$  mit

1.  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}, X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$
2.  $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f), f, g$  Morphismen von  $\mathcal{C}$ .

Klar:  $G, F$  kontravariante Funktoren, so ist  $\circ F$  kovarianter Funktor.

Definition: Sei  $\mathcal{C}$  Kategorie. Dann wird die „opposite“ Kategorie  $\mathcal{C}^{\text{opp}}$  wie folgt definiert:  
 $\text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{opp}}) = \text{Obj}(\mathcal{C}); \mathcal{C}^{\text{opp}}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X), \quad X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$   
 $\text{id} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{opp}}$  ist kontravarianter Funktor.

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktor kovariant  $\rightarrow F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{opp}}$  kontravariant.

Beispiele:

1. Sei  $\mu : B \rightarrow C$  ein Morphismus in der Kategorie  $\mathcal{C}$ . Dann heißt  $\mu$  Monomorphismus  
 $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta : A \rightarrow B$  Morphismen in  $\mathcal{C} : (\mu\alpha = \mu\beta \Rightarrow \alpha = \beta)$   
 $\mu : C \rightarrow B, \alpha, \beta : B \rightarrow A : \alpha\mu = \beta\mu \Rightarrow \alpha = \beta$  heißt analog Epimorphismus.

Vorsicht: In  $\mathcal{R}_1$  ist  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  ein Epimorphismus.

In  ${}_A\text{mod}$  gilt:  $\alpha$  ist Epimorphismus  $\Leftrightarrow \alpha$  surjektiv, Monomorphismus  $\Leftrightarrow \alpha$  injektiv.

Klar: Ein Isomorphismus ist auch Epimorphismus und Monomorphismus.

2. Ein 0-Objekt einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Object  $O \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  so dass gilt:

a)  $|\mathcal{C}(O, X)| = 1 \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  ( $\mathcal{C}(O, O) = \{\text{id}_O\}$ , initiales Objekt)

b)  $|\mathcal{C}(X, O)| = 1 \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  (finales Objekt)

Eindeutig bis auf Isomorphie.

$\mathcal{C}(0, X) = \{0\} = \{0_{0,X}\}, \mathcal{C}(X, 0) = \{0\} = \{0_{X,0}\}$   
 $0_{0,Y} \circ 0_{X,0} : X \rightarrow Y$  heißt 0-Morphismus ( $0_{X,Y}$ )

Sei  $\mathcal{C}$  Kategorie mit 0-Objekt  $O$ . Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  Morphismus in  $\mathcal{C}$ . Wir definieren den Kern wie folgt:

$\ker \varphi$  ist ein Morphismus  $\mu : K \rightarrow A$  so dass gilt:

a)  $\varphi\mu = 0$

b) Ist  $\varphi\psi = 0$  für einen Morphismus  $\psi$  von  $X$  nach  $A$ , so existiert  $\psi' : X \rightarrow K$  mit  $\mu\psi' = \psi$

Dualisieren ergibt Kokern  $\chi = \text{coker } \varphi$  ( $\varphi : A \rightarrow B$ ),  $\chi : B \rightarrow C$ ,  $\chi\varphi = 0$  ( $\mathcal{C}_{R\text{mod}}$ ,  $\text{coker } \varphi = B/\text{im } \varphi$ )

$\forall \rho : B \rightarrow C, \rho\varphi = 0 : \exists \rho' : \rho'\chi = \rho$ .

### 3. Natürliche Transformationen

Definition: Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien und  $F, G$  Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ . Eine natürliche Transformation von  $F$  nach  $G$  ist eine Familie  $(t_X)_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$  von Morphismen  $t_X : F(X) \rightarrow G(X)$ , so dass das folgende Diagramm für jeden Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  kommutiert ( $G(f)t_X = t_Y F(f)$ ):

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{t_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{t_Y} & G(Y) \end{array}$$

Wir schreiben kurz:  $t : F \rightarrow G$  und nennen  $t$  auch „Morphismus von  $F$  nach  $G$ “.

$F, G, H$  Funktoren von  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $t : F \rightarrow G$ ,  $u : G \rightarrow H$  natürliche Transformationen, so wird durch  $(u \circ t)_X = u_X \circ t_X$  eine natürliche Transformation  $u \circ t : F \rightarrow H$  definiert.

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{t_X} & G(X) & \xrightarrow{u_X} & H(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{t_Y} & G(Y) & \xrightarrow{u_Y} & H(Y) \end{array}$$

Klar:  $\text{id}_F = (\text{id}_{F(X)})_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$  ist natürliche Transformation.

Und:  $u \circ (t \circ s) = (u \circ t) \circ s$

„Kategorie“ der Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$ :

Sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  kleine Kategorien, so funktioniert das.

Sind alle  $t_X$  ( $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ) Isomorphismen, so heißt  $t$  „natürliche Äquivalenz“ und wir schreiben  $F \cong G$ .

Klar: Dann wird durch  $t^{-1} = (t_X^{-1})_{X \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$  ein Morphismus  $t^{-1} : G \rightarrow F$  definiert mit  $tt^{-1} = \text{id}_G$ ,  $t^{-1}t = \text{id}_F$ .

Definition: Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien. Dann heißen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  äquivalent, falls es Funktoren  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gibt mit:  $G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}, F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$

Das heißt: Für  $X, Y \in \mathcal{C}, f : X \rightarrow Y$  gilt:

$$\begin{array}{ccc} GF(X) & \xrightarrow[t_X]{\sim} & X \\ GF(f) \downarrow & & \downarrow f \\ GF(Y) & \xrightarrow[t_Y]{\sim} & Y \end{array}$$

$\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \exists$  Isomorphismus  $t_X : GF(X) \rightarrow X$  so dass  $\forall f : X \rightarrow Y$  Morphismus in  $\mathcal{C}$  gilt:  
 $f t_X = t_Y GF(f)$  (analog für  $FG$ )

Wir schreiben  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$

Beispiele:

1. Sei  $\mathcal{C}_0$  Skelett von  $\mathcal{C}, F : \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$  natürliche Einbettung,  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0 : X \xrightarrow[\sim]{\varphi_X} Y \in \mathcal{C}_0$ , wobei  $Y$  das eindeutig bestimmte Objekt von  $\mathcal{C}_0$  isomorph zu  $X$  ist, und für  $f : X_1 \rightarrow X_2$  sei  $Gf = \varphi_{X_1} f \varphi_{X_2}^{-1} (\varphi_{X_1}(X_1) = Y_1, \varphi_{X_2}(X_2) = Y_2)$   
 $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}_0$

2.  $K$  Körper,  $\mathcal{V}_K$  Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume über  $K = {}_K \underline{\text{mod}}$ .  
Für  $V \in {}_K \underline{\text{mod}}$  sei:  
 $\iota_V : V \rightarrow V^{**} : v \mapsto \lambda \alpha. \alpha(v)$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota_V} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\iota_W} & W^{**} \end{array}$$

\*\* ist Funktor von  ${}_K \underline{\text{mod}}$  nach  ${}_K \underline{\text{mod}}$ .

$(\iota_V)_{V \in {}_K \underline{\text{mod}}}$  ist natürliche Transformation von  $\text{id}_V$  nach \*\*

$$f^{**} \iota_V(v) = f^{**}(\lambda \alpha. \alpha(v)) = f^*(v) = \lambda \beta. \beta(f(v))$$

Satz: (Yoneda Lemma) Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  Funktor,  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  und  $\tau : \mathcal{C}(A, -) \rightarrow F$  natürliche Transformation.

Dann wird durch  $\tau \mapsto \tau_A(1_A)$  eine Bijektion zwischen der Klasse  $[\mathcal{C}(A, -), F]$  der natürlichen Transformationen von  $\mathcal{C}(A, -)$  nach  $F$  und der Menge  $F(A)$  definiert. Insbesondere ist  $[\mathcal{C}(A, -), F]$  Menge.

Beweis: Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  Morphismus in  $\mathcal{C}$ :  $(\varphi_* := \mathcal{C}(A, \varphi) = \lambda \alpha. \varphi \circ \alpha)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, A) & \xrightarrow{\tau_A} & FA \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow F(\varphi) \\ \mathcal{C}(A, B) & \xrightarrow{\tau_B} & FB \end{array}$$



ist kommutativ, da  $\tau$  natürliche Transformation ist. Also ist  $\tau_B(\varphi_*(1_A)) = \tau_B(\varphi \circ 1_A) = \tau_B(\varphi) = (F(\varphi))(\tau_A(1_A))$ . Also ist  $\tau_B$  vollständig durch  $\tau_A(1_A)$  bestimmt.

Dies zeigt, dass die Zuordnung  $\tau \mapsto \tau_A(1_A) \in F(A)$  injektiv ist.

$$(\tau_A(1_A) = \tilde{\tau}_A(1_A) \Rightarrow \tau_B(\varphi) = \tilde{\tau}_B(\varphi) \forall B \Rightarrow \tau = \tilde{\tau})$$

Sei  $\kappa \in F(A)$ . Wir definieren  $\tau_B(\varphi) = (F\varphi)(\kappa)$

Wir zeigen:  $\tau = (\tau_B)_{B \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$  ist natürliche Transformation von  $\mathcal{C}(A, -)$  nach  $F$  mit  $\tau_A(1_A) = \kappa$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, B_1) & \xrightarrow{\tau_{B_1}} & FB_1 \\ \theta_* \downarrow & & \downarrow F\theta \\ \mathcal{C}(A, B_2) & \xrightarrow{\tau_{B_2}} & FB_2 \end{array}$$

$\theta : B_1 \rightarrow B_2$  in  $\mathcal{C}$ ,  $\theta_*(\mu) = \theta \circ \mu : A \rightarrow B_2$

Sei  $\varphi : A \rightarrow B_1$  in  $\mathcal{C}$ . Dann gilt:  $\tau_{B_2}\theta_*(\varphi) = \tau_{B_2}(\theta \circ \varphi) = F(\theta\varphi)(\kappa) = F(\theta)F(\varphi)(\kappa) = F(\theta)(\tau_{B_1}(\varphi))$ .

Also ist  $\tau_\kappa := \tau$  natürliche Transformation.

Klar ist:  $(\tau_\kappa)_A(1_A) = F(1_A)(\kappa) = 1_{F(A)}(\kappa) = \kappa$

Also sind  $\tau \mapsto \tau_A(1_A)$  und  $\kappa \mapsto \tau_\kappa$  invers zueinander.  $\square$

Korrolar (Spezialfall):  $A, A' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $F = \mathcal{C}(A', -)$ .

Dann ist  $\mathcal{C}(A', A) = F(A) \cong [\mathcal{C}(A, -), \mathcal{C}(A', -)]$ , der Isomorphismus ist gegeben durch

$\psi \mapsto \psi^*$  (für  $\psi : A' \rightarrow A$  ist  $\psi^* : \mathcal{C}(A, -) \rightarrow \mathcal{C}(A', -)$ ,  $\psi^*(\varphi) = \varphi \circ \psi$ )

Beweis:  $[\mathcal{C}(A, -), F] \cong F(A)$ ,  $\kappa = \psi$ ,  $\tau_B(\varphi) = (F(\varphi))(\psi) = \mathcal{C}(A', \varphi)(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi^*(\varphi)$   $\square$

Satz: Sei  $A, A', A'' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $\tau : \mathcal{C}(A, -) \rightarrow \mathcal{C}(A', -)$ ,  $\tau' : \mathcal{C}(A', -) \rightarrow \mathcal{C}(A'', -)$  natürliche Transformationen.

Ist  $\tau \mapsto \psi \in \mathcal{C}(A', A)$  und  $\tau' \mapsto \psi' \in \mathcal{C}(A'', A')$  unter der Yoneda Abbildung, so ist  $\tau'\tau \mapsto \psi\psi' \in \mathcal{C}(A'', A)$  unter der Yoneda Abbildung. Insbesondere ist  $\tau$  natürliche Äquivalenz  $\Leftrightarrow \psi \in \mathcal{C}(A', A)$  Isomorphismus ist.

## 4. Adjungierte Funktoren

Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  Kategorien,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren.

$\mathcal{F} = \mathcal{D}(-, -) \circ (F \times \text{id}_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S} : (X, Y) \mapsto \mathcal{D}(F(X), Y)$

$\mathcal{G} = \mathcal{C}(-, -) \circ (\text{id}_{\mathcal{C}} \times G) : \mathcal{C}^{\text{opp}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S} : (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, G(Y))$  sind Bifunktoren.

Auf Abbildungen  $f : X_1 \rightarrow X_2$  in  $\mathcal{C}$ ,  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  in  $\mathcal{D}$ :  $\mathcal{F}(f, g) = \mathcal{D}(Ff, g) : \mathcal{D}(FX_2, Y_1) \rightarrow \mathcal{D}(FX_1, Y_2)$ ,  $\mathcal{D}(Ff, g)(h) = ghF(f)$

Definition:  $F$  heißt linksadjungiert zu  $G$  und  $G$  rechtsadjungiert zu  $F$ , falls es eine natürliche Äquivalenz  $\eta = (\eta_{X,Y})_{X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}}$  von  $\mathcal{F}$  nach  $\mathcal{G}$  gibt.

Klartext

$X \in \text{Obj}(\mathcal{C}), Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ . Dann ist  $\eta_{X,y}$  eine Bijektion zwischen  $\mathcal{D}(FX, Y)$  und  $\mathcal{C}(X, GY)$  „Natürlichkeit“ von  $\eta = (\eta_{X,Y})_{X,Y}$ : Sind  $X_1, X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{C}), Y_1, Y_2 \in \text{Obj}(\mathcal{D}), f : X_1 \rightarrow X_2$  in  $\mathcal{C}, g : Y_1 \rightarrow Y_2$  in  $\mathcal{D}$ , so ist die folgenden Diagramme kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(FX_1, Y_1) & \xrightarrow{\eta_{X_1, Y_1}} & \mathcal{C}(X_1, GY_1) \\ Ff^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \mathcal{D}(FX_2, Y_1) & \xrightarrow{\eta_{X_2, Y_1}} & \mathcal{C}(X_2, GY_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(FX_1, Y_1) & \xrightarrow{\eta_{X_1, Y_1}} & \mathcal{C}(X_1, GY_1) \\ g_* \downarrow & & \downarrow (G(g))_* \\ \mathcal{D}(FX_1, Y_2) & \xrightarrow{\eta_{X_1, Y_2}} & \mathcal{C}(X_1, GY_2) \end{array}$$

In einem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(FX_2, Y_1) & \xrightarrow{\eta_{X_2, Y_1}} & \mathcal{C}(X_2, GY_1) \\ \mathcal{D}(Ff, g) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(f, Gg) \\ \mathcal{D}(FX_1, Y_2) & \xrightarrow{\eta_{X_1, Y_2}} & \mathcal{C}(X_1, GY_2) \end{array}$$

so:  $\eta(g \circ h \circ Ff) = Gg \circ \eta(h) \circ f$

Beispiel:  $A, B$   $\Lambda$ -Algebren,  ${}_A L \in {}_A \text{mod}, {}_B M_A \in {}_B \text{mod}_A, {}_B N \in {}_B \text{mod}$

$F : {}_A \text{mod} \rightarrow {}_B \text{mod} : L \mapsto {}_B M \otimes_A L$

$G : {}_B \text{mod} \rightarrow {}_A \text{mod} : {}_B N \mapsto \text{Hom}_B({}_B \text{mod}_A, {}_B N) = \text{Hom}_B({}_B M, -)({}_B N)$

$F$  ist linksadjungiert zu  $G$  („Tensorfunktorkomplexion ist linksadjungiert zum Homfunktorkomplexion“)

$\tau_{L,N} : \text{Hom}_A(L, \text{Hom}_B(M, N)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_B(M \otimes_A L, N), \tau = (\tau_{L,N})$

Sei  $B \subseteq A$  Unterring,  $A$  als  ${}_B A_A$  Modul,  $L \in {}_A \text{mod}, {}_B A_A \otimes_A L = \text{Res}_B^A(L), N \in {}_B \text{mod}, {}_A A \otimes_B N = \text{Ind}_B^A(N)$

$\text{Hom}_A(\text{Ind}_B^A(N), L) \cong \text{Hom}_B(N, \text{Res}_B^A(L))$