Mitschrieb der Vorlesung

Darstellungstheorie I

Wintersemester 2009/10
Prof. Dr. Richard Dipper

3. November 2009

Mitgeschrieben von Stefan Bühler

Inhaltsverzeichnis

I Unknown

II Gruppenkonstruktionen und Automorphismen

Definition 2.1: Sei X eine Menge. Die Freie Gruppe $\mathcal{F}_X$ über X wird wie folgt konstruiert: Ein Wort in $\mathcal{F}_X$ besteht aus einer endlichen Folge

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}, k \leq 0, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, x_i \in X$$

Das leere Wort ($k = 0$) wird als 1 notiert.
Ist für ein $1 \leq i < k$ in einem Wort $x_i = x_{i+1}$ und $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, so können wir dieses Wort verkürzen, in dem wir $x_i^{\varepsilon_i} x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$ entfernen.
Wörter, die nicht mehr verkürzt werden können, heißen unverkürzbar.
Der transitive, symmetrische und reflexive Abschluss des „Kürzens“ definiert eine Äquivalenzrelation; $\mathcal{F}_X$ ist als die Gruppe mit der Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation definiert, wobei die Multiplikation durch Konkatenation der Vertreter definiert wird.
Zwei Wörter sind also äquivalent, wenn man durch Kürzen und Erweitern des einen Wortes das andere erhält.
$\mathcal{F}_X$ ist Gruppe mit folgender universeller Eigenschaft:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\forall f"'] & \mathcal{F}_X \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

, so dass $\hat{f} \circ i = f$ und $\hat{f}$ Gruppenhomomorphismus.

Definition 2.2: Man kann das freie Produkt $G * H$ über den Gruppen G und H als Wörter über dem Alphabet $G \cup H$ definieren.
Das freie Produkt hat folgende universelle Eigenschaft:
Sei $\varphi : G \times H \to A$, G, H, A Gruppen, $\varphi|_{G \times \{1_H\}}$ und $\varphi|_{\{1_G\} \times H}$ jeweils ein Gruppenhomomorphismus, $i : (g, h) \mapsto gh$:

$$\begin{tikzcd} G \times H \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\forall \varphi"'] & G * H \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

, so dass $\hat{\varphi} \circ i = \varphi$ und $\hat{\varphi}$ Gruppenhomomorphismus.

Definition 2.3: Gruppen mit Erzeugenden und Relationen: X eine Menge, $S \subseteq \mathcal{F}_X$ „Relationen“.
Dann ist $N :=< {}^{\mathcal{F}_X}S >$ die normale Hülle von S.
$G = \mathcal{F}_X/N$ die Gruppe, die von X mit den Relationen S erzeugt wird; $G :=< X \mid S >$.

Beispiele:

i) Sei $n \in \mathbb{N}, C_n = \{1, g, \ldots, g^{n-1}\} =< x|x^n = 1 >$
Bem: $|X| \leq 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_X$ ist kommutativ; $\mathcal{F}_X \cong \mathbb{Z} \Leftrightarrow |X| = 1$

ii) $\sigma_n =< \{s_i \mid 1 \leq i < n\} \mid s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| \leq 2, s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} >$
Beachte:
$T \leq S \leq \mathcal{F}_X \Rightarrow U :=< {}^{\mathcal{F}_X}T > \leq < {}^{\mathcal{F}_X}S >=: V$
$\Longrightarrow$ 1. Iso Satz$\exists$ Epimorphismus $\mathcal{F}_X/U \twoheadrightarrow \mathcal{F}_X/v$

iii) Die endlichen einfachenGruppen sind (durchweg?) von 2 Elementen erzeugt.

iv) Sei G Gruppe. Wähle $X = G$, nach universeller Eigenschat $\exists!$ Epimorphismus $\mathcal{F}_G \twoheadrightarrow G$ mit Kern $N \Rightarrow G = \mathcal{F}_G/N$

Definition 2.4: Seien G, H Gruppen. Das direkte Produkt $G \times H$ ist das kartesische Produkt mit komponentenweiser Multiplikation.
$G \cong \tilde{G} := G \times \{1_H\} \trianglelefteq G \times H \trianglerighteq \{1_G\} \times H =: \tilde{H} \cong H$
$forall g \in \tilde{G}, h \in \tilde{H} : gh = hg \Rightarrow \tilde{G}\tilde{H} = \tilde{H}\tilde{G} = G \times H, \tilde{G} \cap \tilde{H} = \{1_{G \times HJ}\}$
$\Rightarrow$ Wir müssen nicht zwischen exterem und internem Produkt unterscheiden.
$|G \times H| = |G||H|$

Betrachte $H, N \leq G, N \trianglelefteq G \Rightarrow HN = NH, HN \leq G$
Sei zusätzlich $HN = G, H \cap N = \{1\}$
Sei $n \in N$. Wegen $nHn^{-1} = H$ ist $c_n : H \to H : h \mapsto {}^n h = nhn^{-1}$ ein Automorphismus von H.
$n \mapsto c_n$ ist Gruppenhomomorphismus $N \to \mathrm{Aut}(H)$.

Satz 2.5: Sei $g \in G, c_g : G \to G : h \mapsto {}^g h$ Automorphismus von G. Die Menge $\mathrm{Inn}(G) := \{c_g \mid g \in G\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$ ist Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$.
$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ (Gruppe der äußeren Automorphismen von G)
Die Abbildung $c : G \to Aut(G) : g \mapsto c_g$ ist Gruppenhomomorphismus mit Bild $\mathrm{Inn}(G)$ (klar) und $\ker c = Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$
Also ist $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$

Beweis. Sei $g, h_1, h_2 \in G$
$c_g(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = g h_1 g^{-1} g h_2 g^{-1} = c_g(h_1) c_g(h_2)$
$c_{g^{-1}} \circ c_g(h) = g^{-1} g h g^{-1} g = 1h1^{-1} = c_1(h) = id_H$
Also ist c_g bijektiv und daher Automorphismus von G.

$c : g \to \mathrm{Aut}(G)$ ist Homomorphismus:
$c_{g_1} \circ c_{g_2}(h) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} = c_{g_1 g_2}(h)$

$$\begin{aligned} c_g = id_G &\Leftrightarrow c_g(h) = h \forall h \\ &\Leftrightarrow ghg^{-1} = h \forall h \\ &\Leftrightarrow gh = hg \forall h \\ &\Leftrightarrow g \in Z(G) \\ &\Rightarrow \ker c = Z(G) \end{aligned}$$

Da $\operatorname{im} c = \mathrm{Inn}(G)$ ist $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$.
Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(G), g \in G$: Zu zeigen: $\varphi \,\mathrm{Inn}(G) \varphi^{-1} = \mathrm{Inn}(G) \Leftrightarrow \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Inn}(G) \forall g, \varphi$
$(\varphi c_g \varphi^{-1})(h) = \varphi(g \varphi^{-1}(h) g^{-1}) = \varphi(g) h \varphi^{-1}(g) = \varphi(g) h \varphi(g)^{-1} = c_{\varphi(g)}(h) \forall h \in G$
$\Rightarrow \varphi c_g \varphi^{-1} = c_{\varphi(g)} \in \mathrm{Inn}(G)$
Also ist $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$ □

Beachte: Sei $N \leq G$. Dann ist $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow c_g(N) = N \forall g \in G$
$(\Rightarrow c_{g_{|N}} \in \mathrm{Aut}(N)$. c_g ist $\in \mathrm{Inn}(N) \Leftrightarrow \exists n \in N : c_g = c_n)$

Definition 2.6: Sei $H < G$. Dann ist H charakteristisch in G, falls $\varphi(H) = H \forall \varphi \in Aut(G)$.
Klar: H char. in $G \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

Beispiel:
$Z(G)$ ist char. in G:
$\forall z \in Z(G), g \in G : \varphi(g)\varphi(z) = \varphi(gz) = \varphi(zg) = \varphi(z)\varphi(g)$
$\Rightarrow \varphi(z) G = G \varphi(z)$
$\Rightarrow \varphi(z) \in Z(G)$

Satz 2.7: Seien $K \leq H \leq G$, K charakteristisch in H, H char. in G. Dann ist K char. in G.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Zu zeigen: $\varphi(K) = K$.
$\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow_{\text{H char. in G}} \varphi(H)(= H \Rightarrow_{|H} \in \mathrm{Aut}(H) \Rightarrow \varphi(K) = \varphi_{|K} = K$, da K char. in H ist. Also ist K char. in G. □

Bemerkung. Sei $S \subseteq G$ mit $S^{-1} = S$ und $\varphi(S) = \{\varphi(s) \mid s \in S\} = S$ für alle $\varphi in \, \mathrm{Aut}(G)$ $(\mathrm{Inn}(G))$. Dann ist $< S > \leq G$ char. (normal) in G.

Definition 2.8: Sei G Gruppe, $a, b \in G$. Dann ist $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator von a und b $([a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba = ab)$.
Die Untergruppe $G' := < [a, b] \mid a, b \in G > \leq G$ heißt Kommutatoruntergruppe von G.

Satz 2.9: Sei G Gruppe. Dann ist G' char. in G (weil $\varphi[a,b] = [\varphi[a],\varphi[b]]\forall\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ebenfalls Kommutator ist, und $[a,b]^{-1} = [b,a]$).
G' ist der kleinste Normalteiler von G, so dass G/G' abelsch ist (d.h. ist $N \trianglelefteq G, G/N$ abelsch $\Rightarrow N \supseteq G'$).

Beweis. Siehe Algebra. ($\pi : G \to G/N : g \mapsto gN, \pi[a,b] = [\pi(a),\pi(b)] = \dots dG/N = N$), $\square$

Definition 2.10: Seien $N, H \leq G, N \trianglelefteq G, G = NH = HN, H \cap N = \{1\}$. dann heißt G (internes) semidirektes Produkt von N mit H. Wir schreiben $G = N \rtimes H$.

Beobachtungen:

a) $G/N = NH/N \cong H/_{N\cap H} \cong H$. Also ist $G/N \cong H$. Daher ist $|G| = |N||G/N| = |N| absH = |N \times H|$

b) $G = N \cdot H \Rightarrow \forall x \in G \exists n \in N \exists h \in H : x = n \cdot h$. Diese Darstellung ist eindeutig: denn seien $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$ und sei $n_1h_1 = n_2h_2$, so folgt $n_2^{-1}n_1 = h_2h_1^{-1} \in N \cap H \Rightarrow n_2^{-1}n_1 = h_2h_1^{-1} = 1 \Rightarrow n_1 = n_2, h_1 = h_2$

c) Allgemein gilt: $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{1\} \Rightarrow hn = nh \forall n \in N, h \in H$, denn seien $h \in H, n \in N \Rightarrow [n,h] = nhn^{-1}h^{-1} = \underbrace{(nhn^{-1})}_{\in H \trianglelefteq G} h^{-1} \in H \cap N = \{1\}$ (die Klammerung analog für N)
Daher: Ist $G = N \rtimes H$ und zusätzlich $H \trianglelefteq G \Rightarrow G = H \times N$ (da $n_1h_1n_2h_2 = n_1n_2h_1h_2$)

d) $G = N \rtimes H, x = n_1h_1, y = n_2h_2 \in G \Rightarrow x \cdot y = n_1h_1n_2h_2 = n_1 \underbrace{(h_1n_2h_1^{-1})}_{\in N \trianglelefteq G} h_1h_2 = (n_1 {}^{h_1}n_2)(h_1h_2) = n'h'$ die eindeutige Darstellung vom Produkt $x \cdot y$ als Produkt eines Elementes aus N mit einem Element aus H.
Die Abb. $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N) : h \mapsto \varphi(h) = \lambda n. {}^h n = \varphi_n = c_{n|_N} \in \mathrm{Aut}(N)$ ist Gruppenhomomorphismus.

e) Multiplikation in G wird vollständig auf die Multiplikation in N und Multiplikation in H und auf φ zurückgeführt: $n_1h_1n_2h_2 = n_1\varphi_{h_1}(n_2)h_1h_2$

f) Ist $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ der triviale Homomorphismus, so ist $\varphi_n = c_{n|_N} = id_N$ für alle $h \in H$, d.h. $\varphi_h(n) = hnh^{-1} = n \Leftrightarrow hn = nh$. Dann ist $H \trianglelefteq G und G \cong H \times N$.
Daher: Ist $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ <u>nicht</u> tirivial, so kann G nicht abelsch sein. ($\varphi(h) = \varphi_h \neq id_N, h \in H, \Rightarrow n \in N : \varphi_h(n) = hnh^{-1} \neq n \Rightarrow hn \neq hn$)

Definition 2.11: Seien H, N Gruppen, und sei $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N) : j \mapsto \varphi(h) = \varphi_h \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus.
Wir definieren das (äußere) semidirekte Produkt $G = N \rtimes H$ wie folgt:
Als <u>Menge</u> ist G einfach das kartesische Produkt $N \times H$.
Sei $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$:

$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2), h_1 \cdot h_2)$

Satz 2.12: Mit obiger Multiplikation wird $G = N \times H$ zur Gruppe $N \rtimes H$ mit Einselement $1_G = (1_N, 1_H)$ und Inverser $(n,h)^{-1} = (\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$
Seien $\tilde{N} = N \times \{1_H\} \subseteq N \times H$ und $\tilde{H} = \{1_N\} \times H \subseteq N \times H$.
Dann ist $\tilde{N} \trianglelefteq G, H \leq G, \tilde{N} \cong N, \tilde{H} \cong H$ und $G = \tilde{N} \rtimes \tilde{H}$ (intern). Für $\tilde{h} = (1_N, h) \in \tilde{H}, \tilde{n} = (n, 1_H) \in \tilde{N}, h \in H, n \in N$ ist $\tilde{h}^{-1}\tilde{n}\tilde{h} = (\varphi_h(n), 1_H)$, d.h. $c_{\tilde{n}^{-1}}|_{\tilde{N}} \leftrightarrow \varphi_h \in \mathrm{Aut}(N)$

Beweis. Übung. □

Bemerkung. Sind φ, ψ verschiedene Homomorphismen von $H \to \mathrm{Aut}(N)$, so können $N \rtimes_\varphi H, N \rtimes_\psi H$ isomorph oder nicht isomorph sein.

Beispiel. $C_n (\cong (\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)) = N, H = C_2 = \{1, h\}$
$\varphi : H \in \mathrm{Aut}(C_n)$ durch $\varphi(1) = id_{C_n}, \varphi_h(x) = x^{-1}$
Die Gruppe $D_{2n} := C_n \rtimes_\varphi C_2$ heißt <u>Diedergruppe</u> der Ordnung $2n$.
D_{2n} ist die Gruppe der Symmetrien eines regelmäßigen n-Ecks; $C_n \trianglelefteq D_{2n}$ ist die Gruppe der Rotationen, $C_2 = D_{2n}/_{C_n}$ sind die Spiegelungen.
$D_{2n} =< x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{-1} >$

III Operationen von Gruppen auf Mengen

Im folgenden sei: G = Gruppe, X = Menge, $\sigma_X = \{f : X \to X \mid f \text{bij. Abb.}\}$ = „symmetrische Gruppe auf X".

Definition 3.13: Eine (Links-)Operation von G auf X ist eine (externe) Verknüpfung

$$G \times X \to X : (g, x) \mapsto gx$$

so dass gilt:

i) $1_G \cdot x = x \forall x \in X$

ii) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

Wir sagen: „G operiert auf X" (durch Permutationen) oder kurz: „X ist G-Menge". (Analog: Rechtsoperation: $X \times G \to X$)

Bemerkung. Ist X G-Menge, σ_X = symmetrischeGrupe auf X, so wird durch $\lambda : G \to \sigma_X : g \mapsto \lambda_g \in \sigma_X$ ein Gruppenhomomorphismus λ definiert, wobei $\lambda_g : X \to X : x \mapsto g \cdot x$; denn: Sei $g \in G : \lambda_g \lambda_{g^{-1}} : x \mapsto g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = 1_G x = x \forall x \in X$, also ist λ_g bijektiv und $\in \sigma_X$.
Seien $g, h \in G \Rightarrow \lambda_g \circ \lambda_h(x) = \lambda_g(\lambda_h(x)) = g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x = \lambda_{gh}(x) \forall x \in X \Rightarrow \lambda_g \lambda_h = \lambda_{gh}$, d.h. λ ist Homomorphismus.
Umgekehrt: Sei $\varphi : G \to \sigma_X$ homomorph. Dann wird durch $g \cdot x := (\varphi(g))(x)$ eine Operation von G auf X definiert, mit $\lambda = \varphi$ (Beweis: Übung).
λ heißt „die zur G-Menge X gehörende Darstellung von G".
Also: Das Konzept der G-Mengen X ist äquivalent zum Konzept der Homomorphismen $G \to \sigma_X$.
(Im Falle der Rechtsoperation: Entweder op σ_X auch von rechts, oder die zug. Darst. $\rho : G \to \sigma_X$ ist ein Antihomomorphismus)

Beispiele: (Running Gag)

1.) σ_X operiert auf X mit Darstellung $id_{\sigma_X} : \sigma_X \to \sigma_X : \pi \mapsto \pi \in \sigma_X, \pi x = \pi(x) \forall x \in X$

2.) G operiert auf der Menge G durch Linkstranslation $g \cdot h = gh$.
Darstellung: $\lambda G \to \sigma_G : g \mapsto \lambda_g; \lambda_g : h \mapsto gh \forall h \in G$
$(|\sigma_G| = |G|!)$

3.) G operiert auf G durch Konjugation:

$$g \cdot h = {}^g h = ghg^{-1}[= c_g(h)]$$

4.) Sei $H \leq G$, $G = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} g_i H$
Wir definieren eine Operation von G auf der <u>Menge</u> G/H der Nebenklassen von H in G durch: $g(g_i H) = g_j H$ (bzw. auf $I : g\dot{i} = j$)
(Linkstranslation auf G/H, Rechtsnebenklassen $H\backslash G$ durch Rechtstranslation)
Spezialfall: $H = (I) \Rightarrow$ Operation von G auf $G/H = G/(I) = G$ aus 2.)

4.) ist die Mutter aller G-Operationen auf Mengen.

Definition 3.14: Eine Operation von G auf X heißt <u>treu</u>, falls gilt: Ist $gx = x \forall x \in X \Rightarrow g = 1$. Offensichtlich heißt dies für die zugehörige Darstellung $\varphi : G \to \sigma_X$, dass φ injektiv ist; denn $gx = x \forall x \in X \Leftrightarrow (\varphi(g))(x) = x \forall x \in X \Leftrightarrow \varphi(g) = id_X \Leftrightarrow g \in \ker \varphi$
So: $\ker \varphi = \{g \in G \mid gx = x \forall x \in X\}$.

Beispiele: 1.), 2.) treu, da $g \cdot h = h \forall h \in G \Leftrightarrow g = 1$
3.) (i.A.) nicht treu. Genauer: $\ker \varphi = \ker c_? = \{g \in G \mid c_g = id_G\} = \{g \in G \mid c_g(h) = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \forall h \in G\} = Z(G)$ Zentrum von G.

<u>Klar:</u> X treue G-Menge, so enthält σ_X durch die zugehörige Darstellung $\varphi : G \to \sigma_X$ eine zu G isomorphe Untergruppe.

Definition 3.15: Seien X, Y G-Mengen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt G-Homomorphismus (auch G-equivariant) falls gilt:
$\forall x \in X, g \in G : \varphi(g, x) = g\varphi(x)$
<u>Wie üblich</u>: Epi-, Mono- und Isomorphismen.
Komposition (und Inversen falls bijektiv) sind wieder Homomorphismen.
Isosätze etc.
Also: Kategorie der G-Mengen.

<u>Übersetzung für Darstellungen:</u>
Seien $\varphi : G \to \sigma_X, \psi : G \to \sigma_Y$ $(X, Y$ Mengen) Darstellungen.
Ein Morphismus von φ nach ψ ist eine Mengenabbildung $f : X \to Y$, so dass $\forall g \in G$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi(g)"'] & Y \arrow[d, "\psi(g)"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

d.h. $f \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ f \Leftrightarrow \psi(g) \circ f \circ \varphi(g)^{-1} = f \forall g \in G$

Dies macht die Klasse der (Permutations-) Darstellungen zu einer Kategorie. Diese ist isomoprh zur Kategorie der G-Mengen (Beweis: Übung).

Ziel: Klassifikation von G-Mengen.

Definition 3.16: X, Y $G-$ Mengen:

a) Die disjunkte Vereinigung $X \dot\cup Y$ wird zur G-Menge durch $g \cdot z = \begin{cases} gx & \text{für } z = x \in X \\ gy & \text{für } z = y \in Y \end{cases}$
(„direkte Summe", „Koprodukt" in Kategorie der G-Mengen)

b) Das kartesische Produkt $X \times Y$ wird zu G-Menge durch $g \cdot (x, y) = (gx, gy) \forall x \in X, y \in Y, g \in G$

c) σ_X wird G-Menge durch $gZ = \{gz \mid z \in Z\}$ für $Z \subseteq X$

Definition 3.17: Sei X eine G-Menge, $x \in X$. Die Bahn (Orbit) $Gx(\,^Gx)$ ist $\{gx \mid g \in G\} \subseteq X$, und der Stabilisator $Stab_G(x)$ in G von x ist $\{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$.
Für $S \subseteq G$ ist der $Stab_G(X) = \{g \in G \mid gs \in S \forall s \in S\}$
Der Punktstabilisator von S in G ist $PStab_G(S) = \{g\ inG | gs = s \forall s \in S\} = \bigcap\limits_{s \in S} Stab_G(s)$

Klar:

1. $Stab_G(x), Stab_G(S), PStab_G(S)$ sind Untergruppen von G.
2. Die Einschränkung von der G-Operation auf die Bahn Gx macht die Bahn Gx von x zur G-Menge.
   Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_G$ auf X durch $x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$
   Die Äquivalenzklasse von $x \in X$ ist die Bahn Gx.
   Konsequenz: X ist die direkte Summe der Bahnen von G auf X.

Definition 3.18: G operiert (einfach) transitiv auf X, falls nur eine Bahn existiert, d.h. $\forall x, y \in X : \exists g \in G : x = gy$.

Beispiele: von 1.3.1

A) Bahnen:
   1.) G ist die einzige Bahn.
   2.) $\forall h_1, h_2 \in G \exists g \in G : h_2 = gh_1 : g := h_2 h_1^{-1}$, also: G ist die einzige Bahn.
   3.) $g \sim_G h \Leftrightarrow \exists xinG : h = xgx^{-1} \Leftrightarrow g$ und h sind konjugiert $\Leftrightarrow$ Bahnen sind Konjugationsklassen.
   4.) Eine Bahn. $g, h \in G \Rightarrow \exists x \in G : h = xg \Rightarrow hH = xgH$

B) Stabilisatoren:
   1.) $x \in X : Stab_{\sigma_X}(x) = \{\pi \in \sigma_X \mid \pi(x) = x\} = \sigma_{X \setminus \{x\}}$, z.Bsp. $Stab_{\sigma_n}(n) = \sigma_{n-1}$
   $Stab_{\sigma_n}(\{1, \dots, i\}) = \{\pi \in \sigma_n | 1 \leq \pi(j) \leq i \forall 1 \leq j \leq i\} = \sigma_{\{1,\dots,i\}} \times \sigma_{\{i+1,\dots,n\}}$
   2.) $h \in G : Stab_G(h) = \{g \in G \mid gh = h\} = \{1\}$

3.) $h \in G : Stab_G(h) = \{g \in G \mid {}^g h = h\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\} =$ Zentralisator von h in G.

4.) Spezialfall $Stab_G(1 \cdot H) = \{g \in G \mid gH = H\} = H$

Lemma 3.19: Sei X G-Menge, $x \in X, g \in G$: Dann ist $Stab_G(gx) = g \cdot Stab_G(x() \cdot g^{-1}$ („konjugierte Untergruppe“)

Beweis. „$\supseteq$“ Sei $h = gfg^{-1} \in$ rechte Seite $\Rightarrow h(gx) = gfg^{-1}gx = gfx = gx \Rightarrow h \in$ linke Seite. „$\subseteq$“ Sei $h \in Stab_G(gx)$, d.h. $h(gx) = gx \Rightarrow g^{-1}hgx = x \Rightarrow g^{-1}hx = f \in Stab_G(x) \Rightarrow h = gfg^{-1} \in gStab_G(x)g^{-1}$ □

Beispiele: von 1.3.1, Stabilisator für 4.):
$Stab_G(xH) = xHx^{-1}$

Neues Beispiel für 1.3.1:

5.) Sei $X = \{H \leq G\}$. Dann operiert G auf X durch Konjugation $lsupgH = gHg^{-1}$
$Stab_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = N_G(H)$ der Normalisator von H in G (die größte Untergruppe von G in der H normal ist, $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$)

Bemerkung. Bahnen sind in 5.) Konjugationsklassen von Untergruppen.
Beachte: $|c_g(H)| = |gHg^{-1}| = |H|$

Satz 3.20: Jede G-Menge ist (eindeutig) disjunkte Vereinigung (direkte Summe) von transitiven G-Mengen, nämlich der Bahnen von G auf der Menge.

Satz 3.21: Sei X transitive G-Menge und $x \in X, H = Stab_G(x)$. Dann ist $X \cong G/H$ aus 1.3.1 Beispiel 4.)